

Archimede

RIVISTA PER GLI INSEGNANTI E I CULTORI DI MATEMATICHE PURE E APPLICATE

ANNO LXXVI LUGLIO-SETTEMBRE 2024

3/2024



Le Monnier

IL SIAMESE E LA FALENA, DUE FRATTALI PER L'ARTE DI ESCHER

di Giorgio Pietrocola

1. INTRODUZIONE

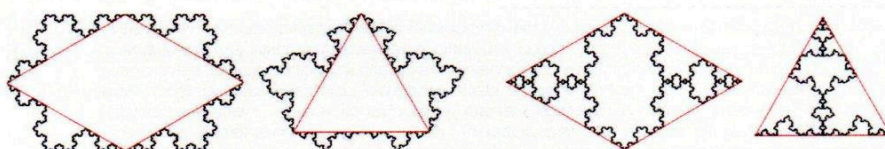


Figura 1 - Il siamese e la falena con le loro antifigure: antisiamese e antifalena. In rosso i principali poligoni di riferimento.

In quest'articolo vengono presentati e comparati due frattali dalle non comuni proprietà replicanti e tassellanti. Entrambi sono stati scoperti dall'autore che sospetta che le due figure siano uniche nel loro genere. La questione però è aperta. Il siamese [3] fu scoperto nel 2020 durante uno studio sulla curva di Koch che portò a pubblicare per il Tartapelago *L'arte della tassellazione del piano con fiocchi di Koch* [2]. Non era una figura ignota, anzi era sotto gli occhi di tutti perché contenuta infinite volte nell'antifiocco di neve, un frattale abbastanza noto. Nessuno però, a quanto pare, lo aveva mai considerato come figura frattale a sé stante, meritevole di un nome specifico per le sue straordinarie proprietà. La falena risulta invece inedita ed è stata scoperta nel mese di marzo 2024, alla vigilia della festa matematica del Pi greco. Entrambe le figure sono replicanti di ordine infinito. Per replicarsi sono costrette a frantumarsi in infinite copie di sé stesse, dando vita a tasselli infinitamente dentellati, ma che si incastrano perfettamente con quelli adiacenti per riprodurre la figura madre. Queste figure possono tassellare il piano in modo infinitamente vario, formando trame intrecciate, dove si incrociano serie geometriche di figure diversamente orientate che ricordano l'arte di M.C.Escher (1898-1972).

2. I MERLETTI

Ecco i merletti, cioè le curve infinitamente frastagliate, su cui si basano i due frattali. Nella loro costruzione il ruolo principale è svolto dal triangolo isoscele con

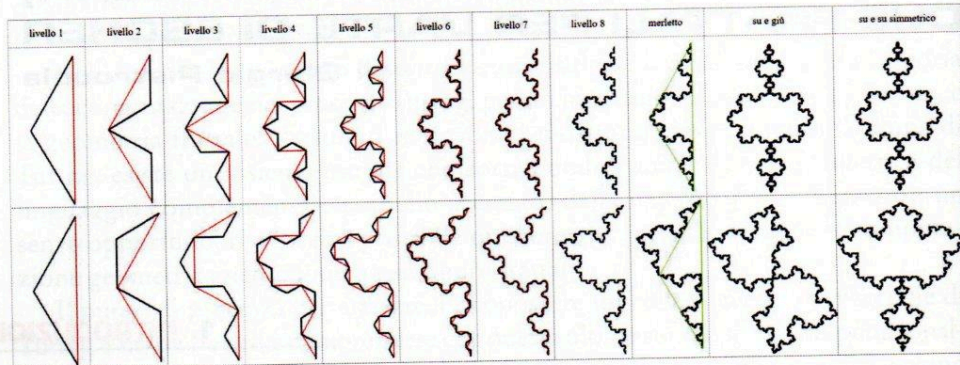


Figura 2 - Confronto tra procedure generanti curve frattali. In rosso viene riportato il livello precedente per evidenziare le trasformazioni del segmento sostituito che sono sempre le stesse, ma non sempre dalla stessa parte. Nella prima riga si vede la convergenza verso la curva di Koch, nella seconda verso la curva dei lepidotteri. A fine riga si merletta anche a destra ottenendo: antisiamese, farfalla e fila di falene.

angolo ottuso di 120 gradi. Come è facile trovare, i suoi due lati uguali si ottengono dividendo la misura del terzo lato per $\sqrt{3}$. In Figura 2 vengono mostrate due procedure simili; trasformano lo stesso segmento iniziale, un livello dopo l'altro, in due diverse curve frattali. In entrambe le procedure, i segmenti della spezzata del livello precedente (mostrati in rosso) vengono sostituiti, a destra o a sinistra, dai due lati del triangolo isoscele precedentemente descritto di cui sono base, raddoppiando così, ogni volta, il numero di segmenti della spezzata che, al limite, darà la curva frattale. Partendo dal primo livello, la sequenza degli orientamenti, come si vede in figura, è esprimibile come sequenza di stringhe:

$$S, D^2, S^4, D^8, S^{16}, D^{32}, S^{64}, D^{128}, \dots \text{ (merletto di Koch)}$$

$$S, DS, (SD)^2, (DS)^4, (SD)^8, (DS)^{16}, (SD)^{32}, \dots \text{ (merletto dei lepidotteri)}$$

dove S sta per sostituzione a sinistra, D a destra. Gli esponenti dicono quante volte ripetere la base. Per esempio $(SD)^2 = SDS D$. La virgola separa i vari livelli partendo dal primo. A ogni livello successivo la lunghezza della stringa di lettere raddoppia dato che i segmenti della spezzata precedente vengono sostituiti, ognuno da due segmenti più piccoli, a destra o a sinistra, partendo dal basso, come indica la stringa. Per questo la lunghezza della stringa relativa al livello n è 2^n . Si noti che, in entrambi i casi, le stringhe iniziano con S nei livelli dispari e con D nei pari. Nel primo caso le sostituzioni, a ogni livello, sono solo da una parte, nell'altro sono sempre alternate. Con la prima procedura si ottiene la curva di Koch in un modo diverso da quello tradizionale, ma utile per il confronto. Questa, infatti, non segue le potenze del 4, ma quelle del 2, per cui la convergenza è meno veloce, ma evidenzia la natura di replicante di ordine due di questa curva, cioè il fatto che ta-

gliando a metà il merletto di Koch se ne ottengono due copie più piccole del tutto simili all'originale (Figura 2, merletto con triangolo isoscele evidenziato in verde). Nel secondo caso si ottiene quella che ho chiamato curva dei lepidotteri, un altro replicante di ordine due, come evidente nella stessa Figura 2, dove si vedono i due lati uguali del triangolo isoscele, in verde, merlettati, uno internamente e uno esternamente, dalla stessa curva. Nelle ultime due caselle della stessa figura si mostrano figure frattali basate sul merletto costruito in quella fila. Nella penultima casella il merletto è ripetuto dalle due parti del segmento del livello zero, prima dal basso verso l'alto poi viceversa. Nell'ultima casella invece, nella parte destra, si costruisce l'immagine speculare del merletto di sinistra. Nel primo caso, quello della curva di Koch, nelle due ultime caselle si ha lo stesso risultato: la fila di siamesi, cioè l'antisiamese [3]. Nel secondo caso, quello della curva dei lepidotteri, si hanno, invece, due figure distinte poco note: la farfalla [1] e la fila di falene. Il merletto dei lepidotteri speculare, necessario per la fila di falene, corrisponde a una sequenza duale di quella già vista: $D, SD, (DS)^2, (SD)^4 \dots$

3. POLIGONI FRATTALI

Chiameremo poligoni frattali, i poligoni i cui lati sono sostituiti da merletti o da loro parti, ripetute o no. Il più noto di questi è il fiocco di neve dove i tre lati di un triangolo equilatero sono sostituiti da merletti di Koch rivolti esternamente. Nella sua antifigura sono invece rivolti internamente. La curva di Koch può considerarsi sia come segmento frattale, sia come triangolo isoscele merlettato internamente. Il merletto dei lepidotteri, oltre che come segmento frattale, può considerarsi come triangolo isoscele merlettato due volte internamente e una esternamente e anche come triangolo rettangolo, metà di un equilatero, merlettato internamente (Figura 2). In Figura 1 si vede come la merlettatura del rombo, pari a due equilateri, dà un siamese quando esterna e un antisiamese quando interna. Così come la merlettatura del triangolo equilatero dà falena e antifalena. Per le proprietà della curva di Koch, il fiocco e il siamese possono essere considerati anche come esagoni frattali merlettati internamente.

4. VEICOLI DI TASSELLAZIONE

Se poligoni uguali tassellano il piano, sostituirli con poligoni frattali può portare a risultati interessanti perché l'accostamento dei lati frastagliati, in certi casi, genera un'unica figura ripetuta all'infinito su diverse scale. Quando ciò accade diremo che il poligono frattale veicola una tassellazione del piano. In rari casi, si può ottenere, complessivamente, un'unica figura, per esempio, come mostrato in Figura 3, una tassellazione del piano con triangoli equilateri, sostituiti da antifiocchi di neve, veicola una tassellazione del piano con soli siamesi. Infatti gli infiniti siamesi generati dal contatto dei poligoni merlettati si integrano con quelli della figura stessa realizzando una tassellazione del piano con una sola figura in diverse dimensioni,

decescenti in progressione geometrica. Altre figure frattali capaci di veicolare tassellazioni con una sola figura sono il siamese, l'antisiamese [3], la falena e l'anti-falena, come mostrato sempre in Figura 3.

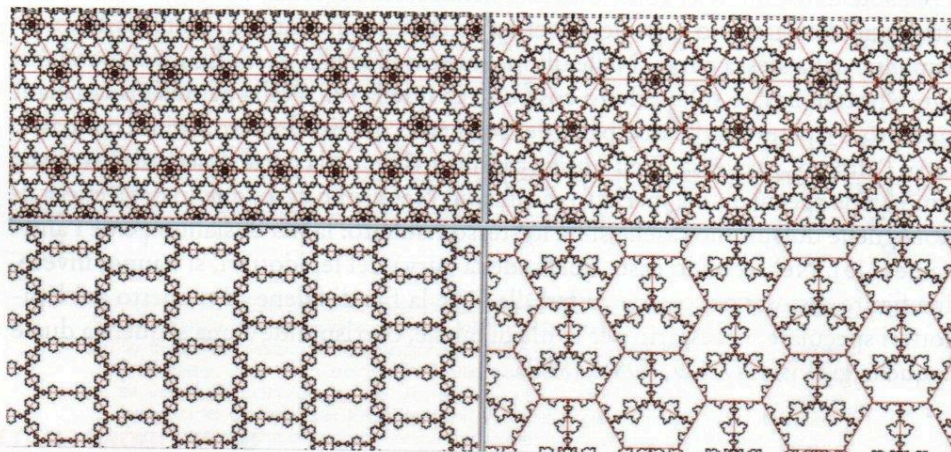


Figura 3 - Poligoni ordinari, in rosso, tassellano il piano. In nero i loro corrispondenti poligoni frattali, antifiocco, antifalena, siamese e falena inducono tassellazioni del piano con una sola figura, in un'infinità di taglie.

5. I LEPIDOTTERI

Il merletto dei lepidotteri, come visto, genera due interessanti figure frattali: la farfalla e la falena. La prima, poco nota [1], è un rettangolo frattale replicante di ordine tre con cui si può tassellare il piano (Figura 4).

La seconda figura è la falena, un triangolo equilatero frattale che compare infinite volte nella figura fila di falene che può considerarsi un quadrilatero frattale (angoli: 60, 90, 120, 90). Accostando vari quadrilateri si possono ottenere vari tasselli atti a veicolare tassellazioni di sole falene (Figura 5). La fila di falene è un

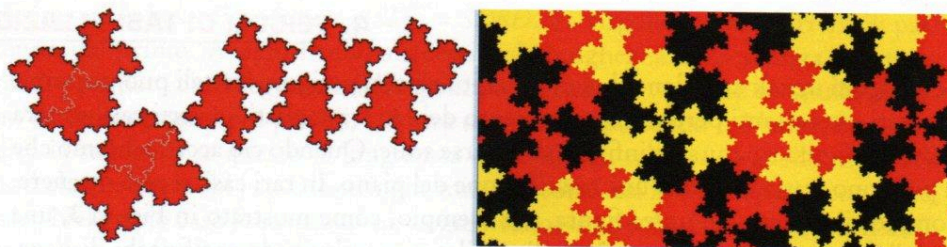


Figura 4 - La farfalla è un frattale che può tassellare il piano. È anche una figura replicante di ordine 3 che può scindersi in tre copie simili delle stesse dimensioni, ma immagini speculari della figura madre.

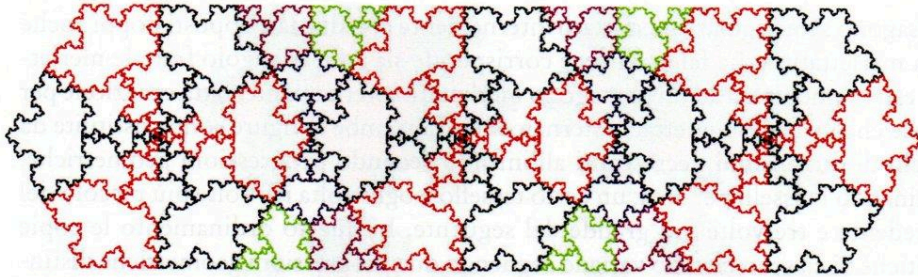


Figura 5 - L'esagono frattale nero e rosso, il triangolo frattale tricolore e l'esagono allungato complessivo multicolore, sono tre figure basate su accostamenti della figura fila di falena. Questi frattali, i cui corrispondenti poligoni tassellano il piano, inducono tassellature di sole falene.

frattale autosimile perché se, partendo dalla falena maggiore, si prende lungo l'asse verticale solo il terzo inferiore, si ha lo stesso frattale in scala ridotta 1:3. La prima metà dell'asse è occupata dalla falena più grande ed è la sua misura. La seconda metà è divisa in tre parti. In quella centrale c'è un'altra falena con misura ulteriormente ridotta di $\frac{1}{9}$. I rimanenti tratti vengono a loro volta divisi in tre parti e la situazione si ripete all'infinito.

6. CONFRONTO

Siamese e falena, come mostrato in Figura 6, possono contenere le rispettive antifigure. Il rombo per il primo e il triangolo equilatero per il secondo fanno da specchio ai rispettivi merletti. Le due antifigure scompongono le rispettive figure in infinite copie di sé stesse. Nella figura sono evidenziati anche i poligoni. Come si vede il siamese corrisponde sia a un rombo frattale merlettato esternamente sia a

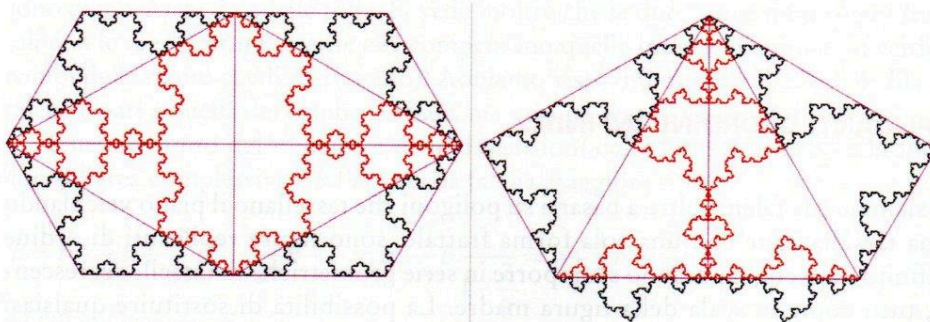


Figura 6 - Le figure frattali, siamese e falena, in nero, hanno la proprietà di essere scomposte dalle rispettive antifigure, in rosso, in infinite copie di sé stesse. In viola gli assi di simmetria e i poligoni di riferimento.

un esagono semiregolare merlettato internamente con due lati opposti doppi anche nella merlettatura. La falena invece corrisponde sia a un triangolo frattale merlettato esternamente sia ad un pentagono merlettato internamente, fatta eccezione per la base che invece è merlettata esternamente. Entrambe le figure sono costituite da tasselli di dimensioni decrescenti all'infinito secondo progressioni geometriche. Ordinando i tasselli per area, un certo tassello è ogni volta tre volte più piccolo del precedente e tre volte più grande del seguente. In questo ordinamento le copie identiche di ciascun tassello variano seguendo due progressioni geometriche distinte. Indicando in rosso il numero dei tasselli interni e in nero gli altri, per dimensioni decrescenti risulta:

Siamese: 1 4 2 8 4 16 8 32 ...
Falena: 2 1 4 2 8 4 16 8 ...

Indicando con a l'area del siamese maggiore si verifica facilmente che:

$$a = \frac{1}{3}a + \frac{4}{9}a + \frac{2}{27}a + \frac{8}{81}a + \frac{4}{243}a + \frac{16}{729}a + \dots =$$

$$\frac{1}{3}a\left(1 + \frac{2}{9} + \left(\frac{2}{9}\right)^2 + \dots\right) + \frac{4}{9}a\left(1 + \frac{2}{9} + \left(\frac{2}{9}\right)^2 + \dots\right) =$$

$$\frac{1}{3}a\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{9}\right)^k + \frac{4}{9}a\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{9}\right)^k = \frac{3}{7}a + \frac{4}{7}a.$$

Analogamente se b è l'area della falena maggiore:

$$b = \frac{2}{3}b + \frac{1}{9}b + \frac{4}{27}b + \frac{2}{81}b + \frac{8}{243}b + \frac{4}{729}b + \dots =$$

$$\frac{2}{3}b\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{9}\right)^k + \frac{1}{9}b\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{9}\right)^k = \frac{6}{7}b + \frac{1}{7}b.$$

7. REPLICANTI DI ORDINE INFINITO

Il siamese e la falena, oltre a basarsi su poligoni che tassellano il piano veicolando una tassellazione con una sola forma frattale, sono figure replicanti di ordine infinito dato che si possono scomporre in serie geometriche di tasselli decrescenti, tutti copie in scala della figura madre. La possibilità di sostituire qualsiasi tassello con una sua scomposizione permette di ampliare enormemente la già ricca gamma delle trame.

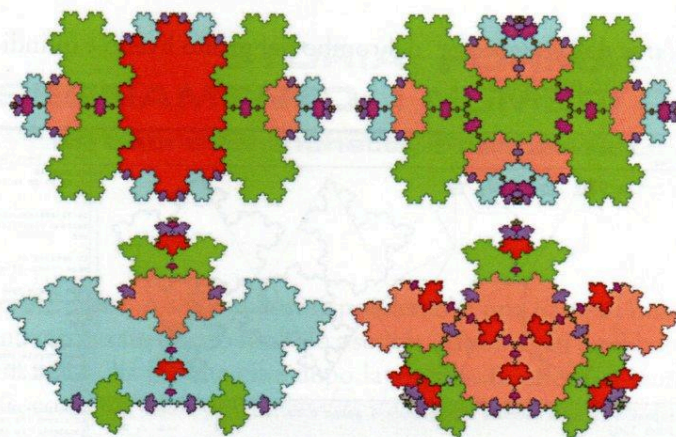


Figura 7 - Nella seconda figura in alto a destra il siamese rosso della prima è stato a sua volta scomposto. Così in basso per le due falene azzurre.

8. AREE

È noto che l'area del fiocco di neve aumenta di $\frac{3}{5}$ l'area del triangolo equilatero merlettato. Naturalmente l'antifiocco diminuisce della stessa frazione. Il siamese è un rombo, pari a due triangoli equilateri, merlettato esternamente 4 volte, dunque la sua area aumenta di $\frac{4}{5}$ dell'area di un triangolo equilatero, il che equivale a $\frac{2}{5}$ dell'area del rombo. Questa stessa area va sottratta nel caso dell'antisiamese, quindi le loro aree sono rispettivamente $\frac{7}{5}$ e $\frac{3}{5}$ dell'area del rombo. Come si vede dalla Figura 8, dopo il primo livello, l'area della farfalla in formazione rimane costante dato che ogni volta, per via delle alternanze a destra e sinistra, le quantità aggiunte sono compensate da quelle tolte. Si vede inoltre che le due figure sono rombi frattali con le merlettature esterne che compensano quelle interne (Figura 8, in verde i rombi delle figure che li merlettano). Abbiamo visto dunque che l'area della fila di falene è pari a quella del rombo iniziale, ma qual è l'area di una singola falena?

Tenendo conto del numero e delle dimensioni delle infinite falene, indicando con B l'area complessiva e b l'area della falena maggiore si ha:

$$B = b + \frac{1}{9}b + \frac{2}{81}b + \frac{4}{729}b + \dots = b + \frac{1}{9}b \frac{1}{1 - \frac{2}{9}} = b + \frac{1}{7}b = \frac{8}{7}b$$

da cui anche $b = \frac{7}{8}B$.

Dunque l'area della falena è $\frac{7}{8}$ del rombo del primo livello e quindi $\frac{7}{4}$ del triangolo equilatero che merletta.

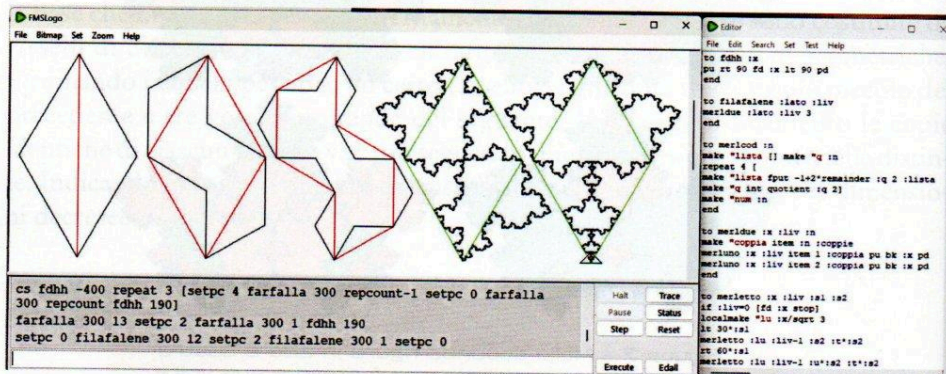


Figura 8 - La falena è preceduta dai primi tre livelli della sua costruzione, in nero. In rosso i livelli precedenti. In verde si evidenzia che le figure sono rombi frattali con i merletti estroflessi che compensano quelli introflessi. Nell'apposito spazio sottostante sono rimasti memorizzati i comandi che hanno generato i disegni. Sulla destra, nella finestra Editor, la parte iniziale del programma messo a disposizione dei lettori.

9. FMSLOGO

Tutte le illustrazioni di questo articolo sono state realizzate con FMSLogo (Figura 8), una versione del Logo per Windows che si può scaricare gratuitamente. A integrazione dell'articolo alla url www.pietrocola.eu/Archimede.htm sono disponibili per i lettori ulteriori dettagli illustrati per installare questo linguaggio sul proprio computer e per usare tutte le procedure messe a disposizione per disegnare sullo schermo le figure frattali presentate.

Giorgio Pietrocola

giorgio.pietrocola@gmail.com

Riferimenti bibliografici

- [1] Giorgio Pietrocola, Mostra di frattali replicanti, Maecla, 2009. <http://www.pietrocola.eu/maecla/tartapelago/frattali/petalo.htm>
- [2] Giorgio Pietrocola, L'arte della tassellazione del piano con fiocchi di Koch, Maecla, 2020. <http://www.pietrocola.eu/maecla/tartapelago/frattali/indexfiocchi.htm>
- [3] Giorgio Pietrocola, Dalla curva di Koch alla tassellazione del piano con una sola figura frattale, *Archimede* 4, 2023.
- [4] Martin Gardner, Figure piane che si ripetono, *Enigmi e giochi matematici*, vol. 4, Sansoni, 1977.