

# Una farfalla tra i draghi nel mondo della geometria frattale

di Giorgio Pietrocola (giorgio.pietrocola@gmail.com)

## 1. Introduzione

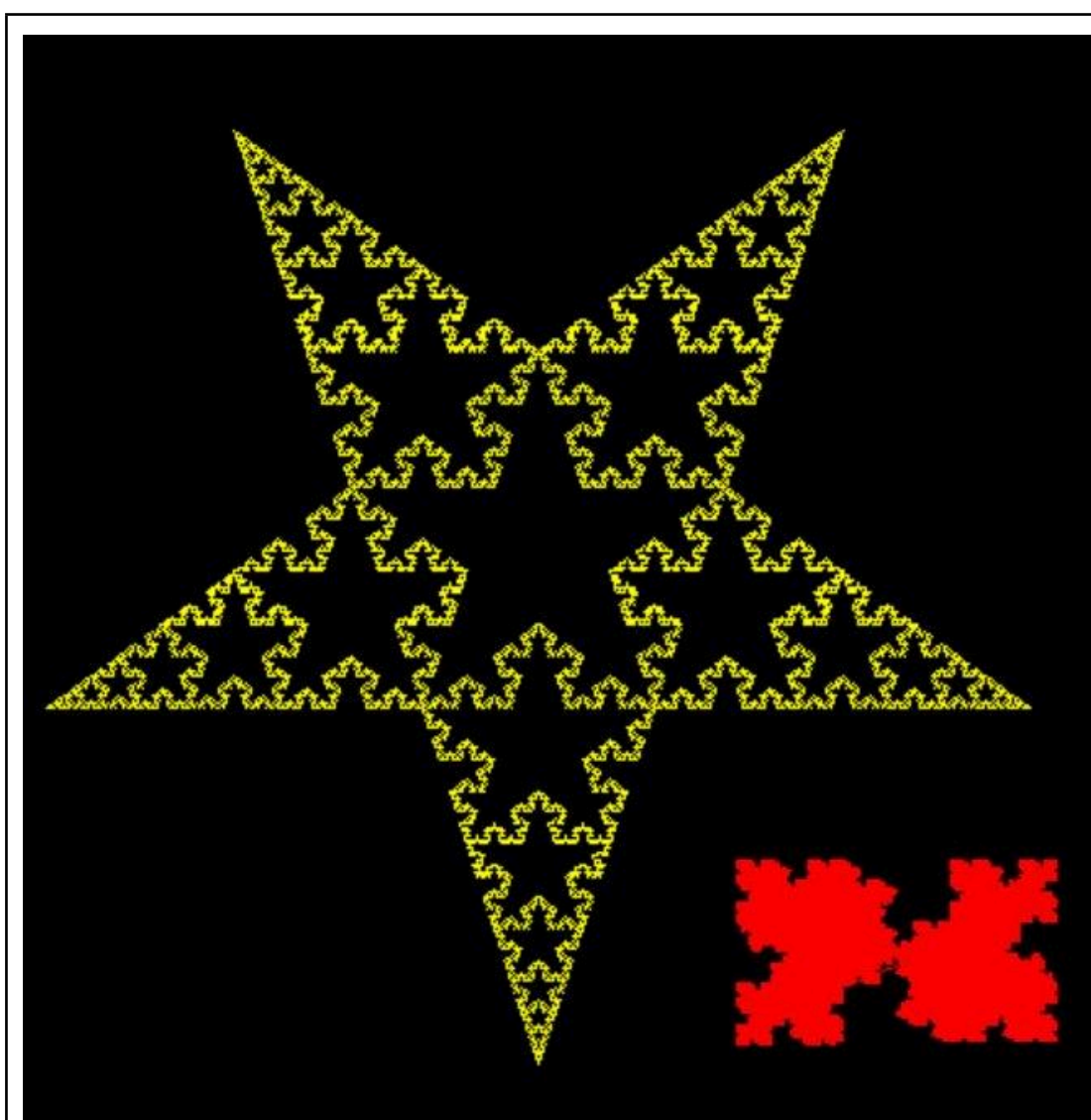
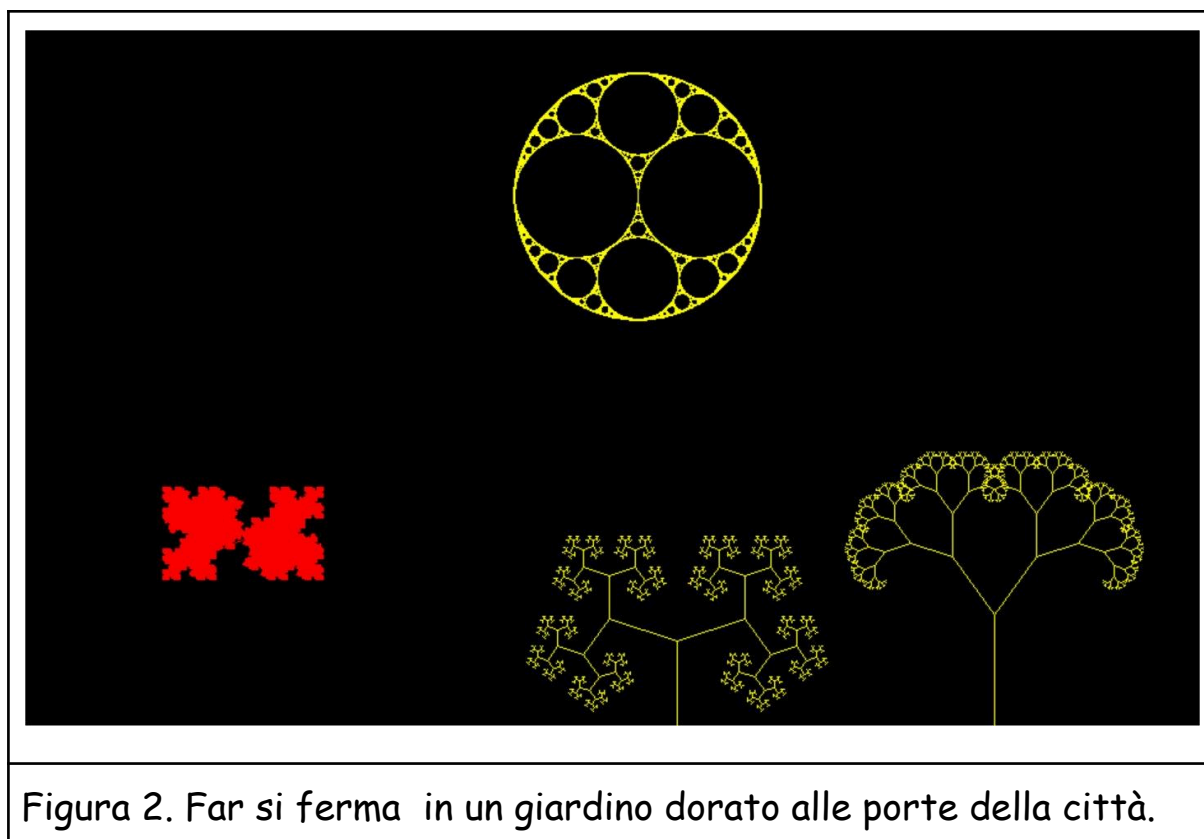


Figura 1. Una farfalla inizia il suo viaggio di ricerca guidata dalla sua stella.

Nel mondo virtuale della geometria frattale, in una dimensione variegata e frastagliata, ai confini tra immaginazione ed esistenza, in un luogo impervio, sorge una grande e popolosa città abitata da mostruose e gentili figure in armonia con il loro mondo.

Al centro di Fratlandia, questo il nome della città, c'è un pittoresco quartiere dove hanno dimora le star, le figure di maggior fama della geometria frattale.



Qui, guidata da una magnifica stella, trasportata da un vento leggero, una notte illuminata da una fantastica luna, giunge una gentile farfalla che, stanca, si ferma finalmente in uno splendido giardino i cui alberi, illuminati dall'astro lucente, sembrano essere d'oro. Trovato un accogliente albero di Pitagora si sistema in un suo comodo quadrato costruito in uno dei suoi tanti cateti e finalmente si riposa dalle fatiche del viaggio.

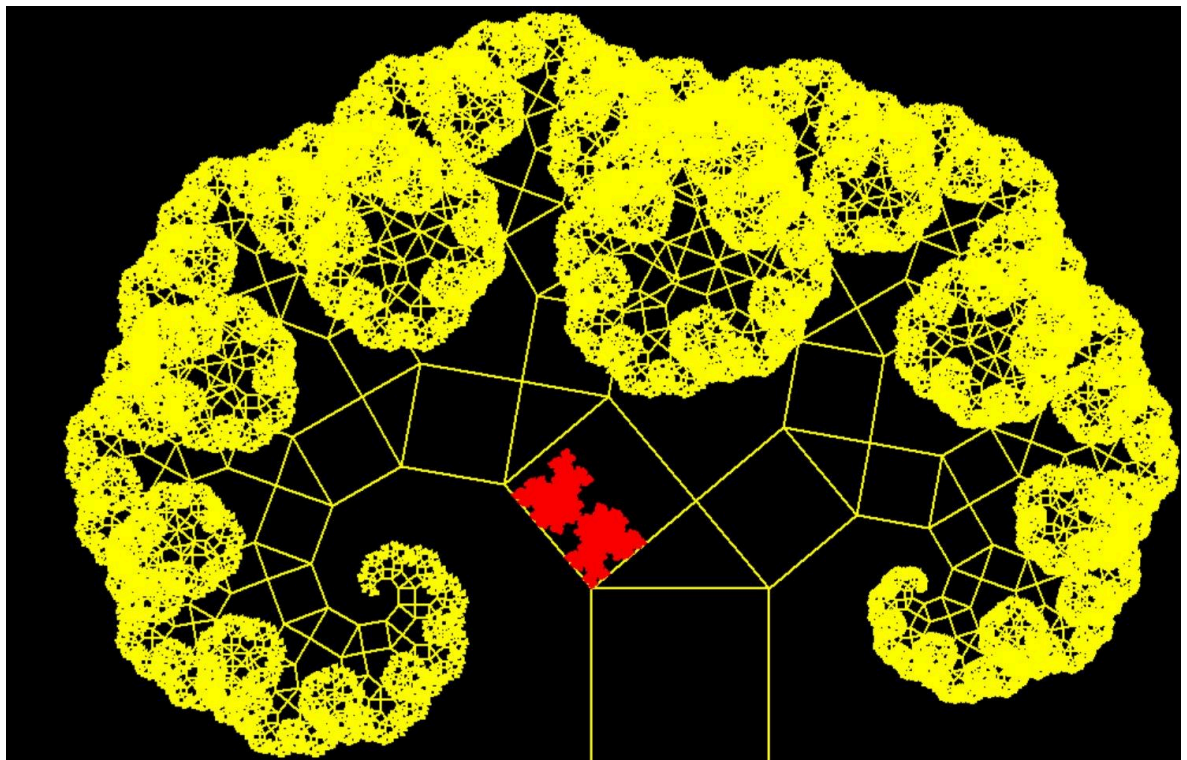
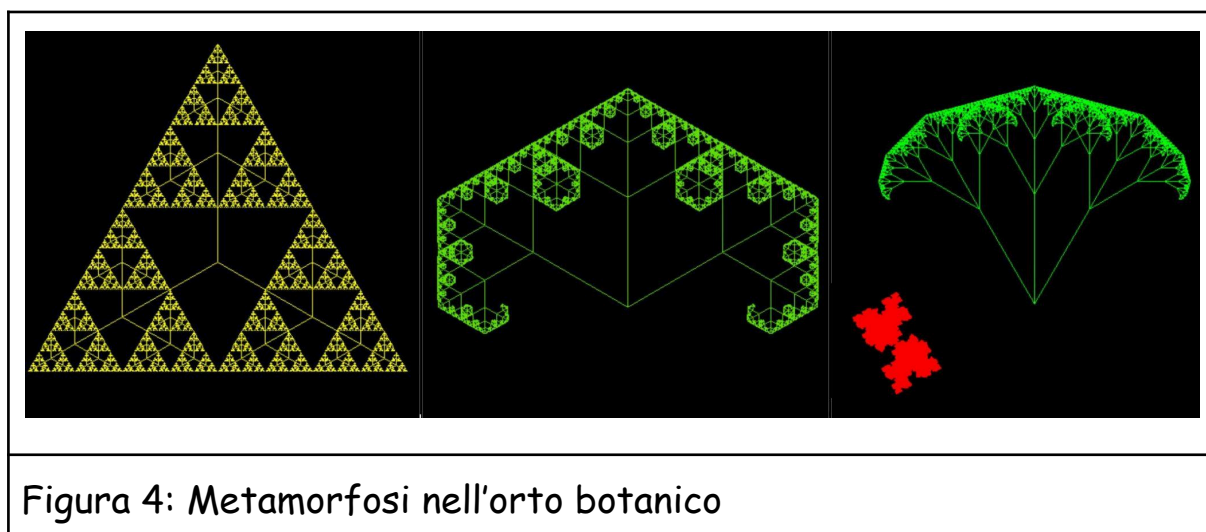


Figura 3. Far si sistema in un quadrato di un albero di Pitagora per riposare.

Svegliatasi alle prime luci dell'alba Far, questo è il nome della nostra farfalla, si accorge di essere in un meraviglioso orto botanico e può assistere alla prodigiosa metamorfosi di un albero di Sierpinski che, mentre di notte è simile al famoso triangolo, alle prime luci del giorno, variando l'angolazione dei suoi tre rami, diventa un albero pronto a ricevere la calda luce solare.



La mattina successiva Far si mette alla ricerca di suo fratello Ter, il drago. Fino a poco tempo fa, non sapeva di avere un fratello, tanto meno un fratello drago, ma questa recente informazione, avuta da

un Prof di Mat, l'ha colpita profondamente. La rivelazione le è sembrata ben fondata ed estremamente convincente, tanto da spingerla ad affrontare questo impegnativo viaggio.

Questo Prof si è interessato a lei, per la seconda volta a distanza di molti anni, ma questa volta non l'ha solo ritratta in immagini animate, ma ha ritenuto opportuno inviare un articolo, incentrato proprio su di lei, a una rivista didattica per cultori di matematica. L'articolo ne mostra le virtù e spiega le sue affinità genetiche non solo con il drago ternario, ma anche con famose star di questo mondo intricato che si fregiano del prestigioso nome di Koch.

Far percorrere tutto il viale della Ricorsività che sembra non finire mai, poi, all'improvviso, attratta da aurea bellezza, raggiunge piazza Lucio Saffaro, dove incontra una sterminata moltitudine di strane creature parlanti a forma di  $C$ .



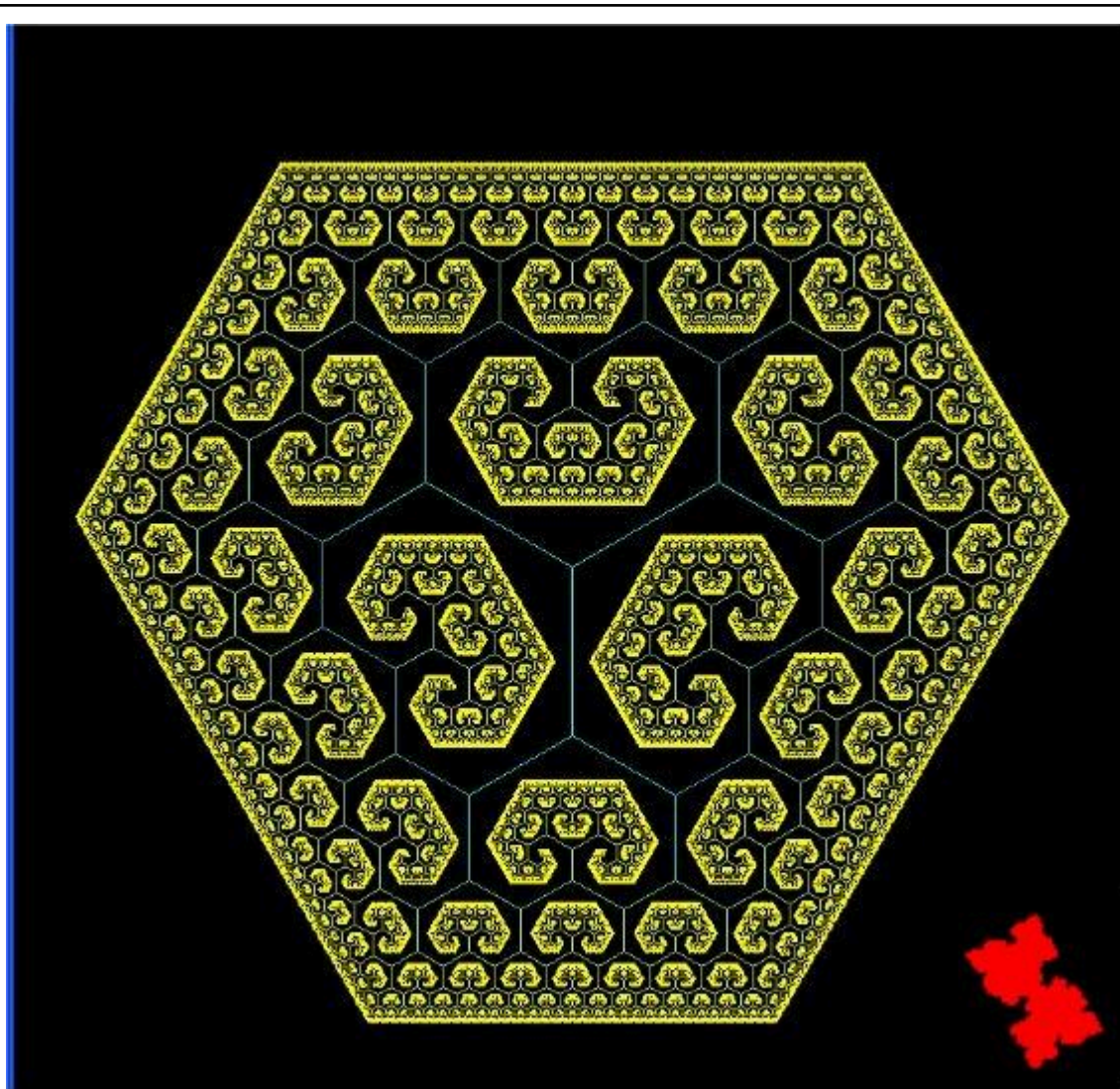


Figura 5: In piazza Lucio Saffaro

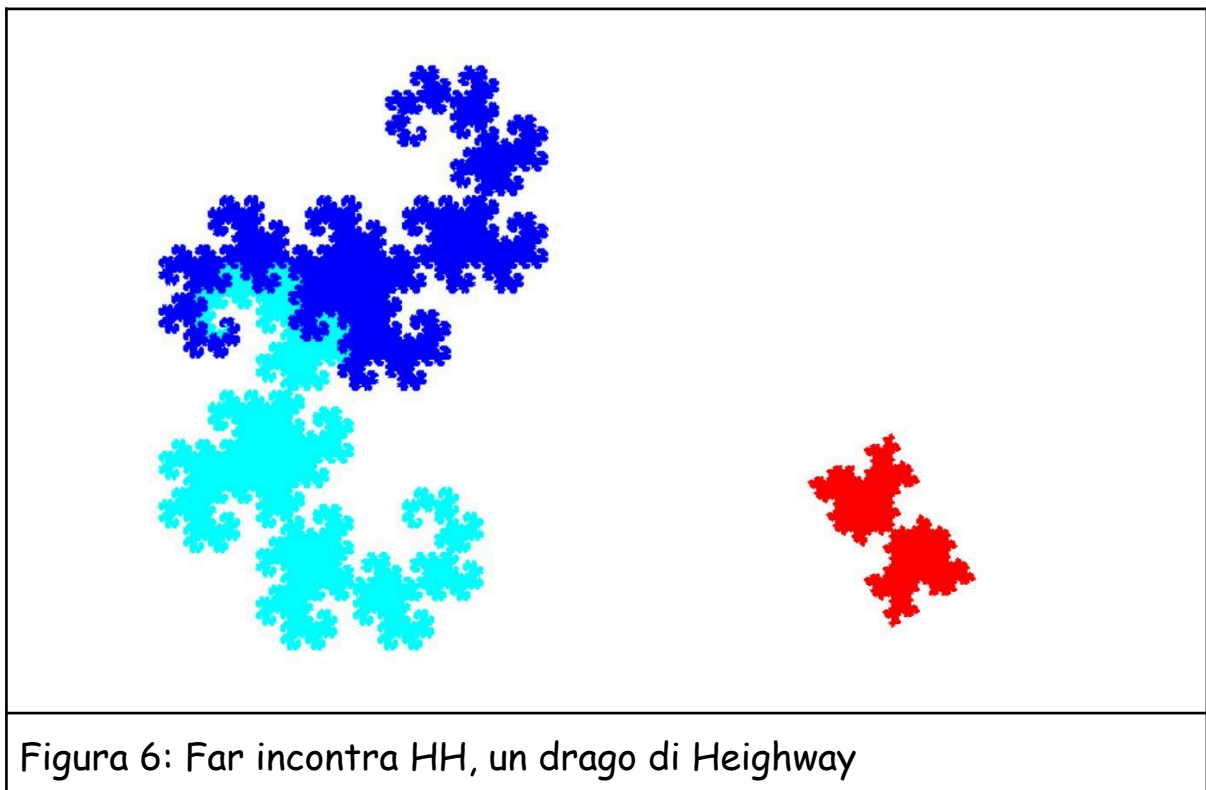
Le  $C$  le ricordano vagamente la curva del drago di Levy, un drago abbastanza famoso.

A loro chiede la strada per raggiungere il suo drago.

La risposta non si fa attendere ma è data da un inaspettato coro di voci, una sorta di intrecciato canone musicale che sorprende e disorienta la povera

Far. Tanto che finisce per incontrare un altro drago, HH, un maestoso drago di Heighway.

## 2. Incontro con HH



**HH:** « No, non sono chi cerchi, anche se noi due draghi abbiamo qualcosa in comune. Io però non sono ternario ma binario. Guarda, i miei due colori corrispondono a due draghi simili a me, ma con superficie dimezzata. Sono una figura replicante del

secondo ordine non del terzo come Ter che incontro spesso al circolo dei draghi e che sospetto sia un mio parente.»

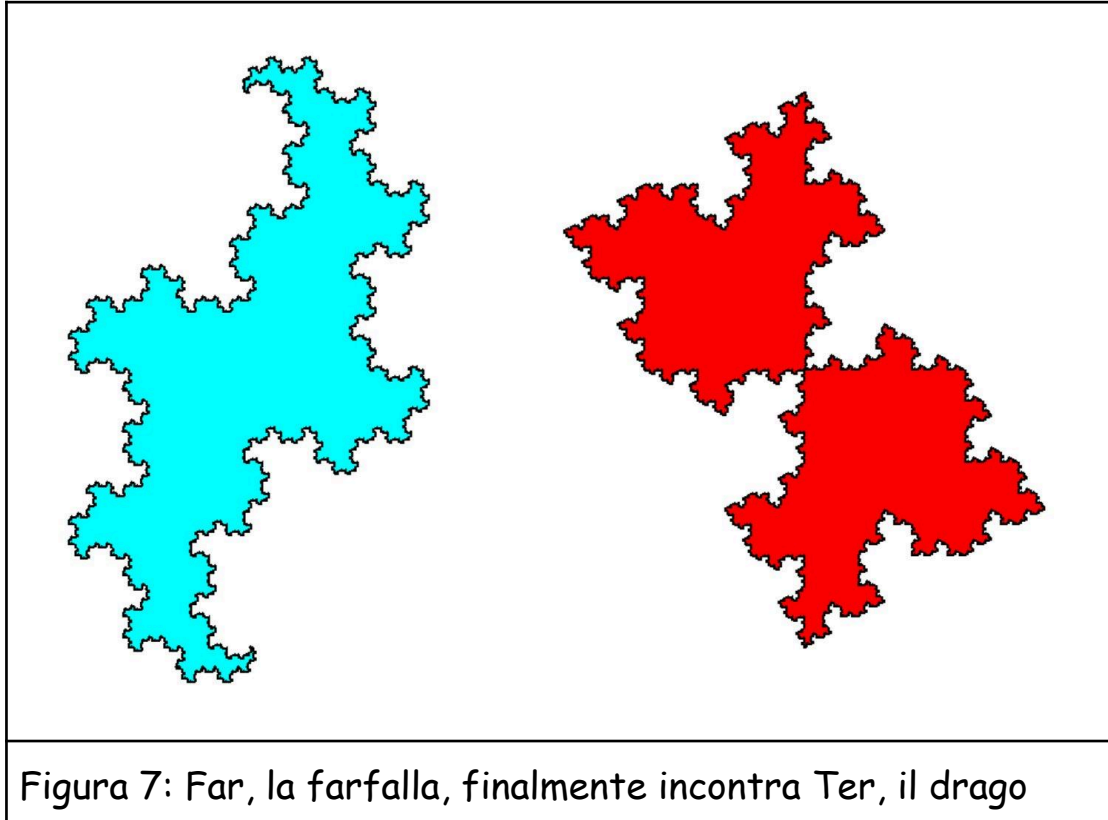
**Far:** «Molto interessante!. Recentemente mi sono appassionata alla ricerca genetica. Sono venuta in questa città proprio per questo. Indagherò con la comparazione genetica algoritmica e se avrò notizie più precise te lo farò sapere.»

**HH:** «Grazie, sei molto gentile. Intanto ti indicherò come raggiungere Ter.»

**Far:** «Sì, grazie anche a te per la cortesia.»



### 3. Incontro con Ter



**Far:** «Ciao, ti riconosco, tu sei Ter, il drago ternario!»

**Ter:** «Ciao... Sì... Sì, certo, sono io, e tu invece chi sei?»

**Far:** «Io sono Far, la farfalla, un frattale molto meno noto di te, benché ora abbia anche io qualche ritratto

e persino un filmato a me dedicato nel vasto web. Tra qualche tempo potrei comparire perfino nel mondo della carta stampata.»

**Ter:** «Piacere di aver fatto la tua conoscenza, qual è il motivo della tua visita?»

**Far:** «Sono venuta qui perché mi sono convinta che tu sia mio fratello.»

**Ter:** «Ah,ah, - ferito nella sua presunta identità, ride con fare canzonatorio -, ma cosa dici mai? Io sono un drago ternario, lo hai ammesso anche tu. Sono orgoglioso della mia stirpe. Sono conosciuto e stimato come drago anche dai miei vicini. Ho un nome, ormai affermato tra gli umani che mi studiano e mi rappresentano. Cosa posso avere in comune con un lepidottero come te?»

**Far:** «Ammetto che il nostro aspetto possa sembrare assai diverso. Ma l'apparenza spesso inganna. I caratteri appariscenti non sono tutto, anzi, benché possano favorire i pregiudizi dei più, sono, tutto sommato, poca cosa. Una comprensione profonda

rende spesso insignificante una comprensione superficiale.»

**Ter:** «Superficiale? Superficiale a chi? Prima tenti di declassarmi da nobile drago a ignobile insetto, poi mi dai del superficiale. Tu mi offendi. Bada a te!»

**Far:** «Sei permaloso e un po' razzista, non hai un buon carattere, fratellino mio, ma io già ti voglio bene e non ho alcuna intenzione offensiva. Né alcuna voglia di litigare con te. La mia non è solo un'opinione. Ho molti argomenti a sostegno della mia convinzione sulla nostra stretta parentela.»

#### 4. Replicazione

**Ter:** «Non sono tuo fratello e quindi sei pregata di non prenderti queste confidenze! Non approfittare del mio buon cuore e di essere una gentile farfalla!

Invece di darmi del superficiale rispondi alla mia domanda, trova qualcosa, almeno una cosa, che abbiamo in comune!»

**Far:** «Oh, per questo non serve neppure andare in profondità, basta restare in superficie. Sai quanto misura l'area della tua superficie?»

**Ter:** «Sì, certo, noi draghi andiamo a scuola, cosa credi? L'area della nostra superficie di draghi ternari è  $d$  per  $d$  per un numero fisso. Dove  $d$  è la misura del nostro diametro, cioè la distanza tra le nostre punte estreme. Più semplice della superficie di un cerchio che è  $d$  per  $d$  per un quarto di  $\pi$  greco. Il maestro ci insegnò a recitare: "L'area del drago qual è? Un sesto,  $d$  quadro, radical tre".»

**Far:** «Bene, perfetto, sappi allora che la nostra superficie di farfalle, non a caso, ha esattamente la stessa area della vostra di draghi ternari. Come lo spieghi?»

**Ter:** «Incredibile! Non ho idea di come si possano calcolare simili aree, ma non riesco a credere a una

tale coincidenza. Ciò mi appare del tutto inverosimile.»

**Far:** «Posso spiegarti tutto in dettaglio se vuoi.»

**Ter:** «Sì, proverò a seguirti su questa questione che ora mi appare complicata, ma prima rispondimi su una questione molto più semplice.»

**Far:** «Dimmi pure.»

**Ter:** «A me risulta che sono figlio di un drago ternario, che ho due fratelli e nessuna sorella. Ora ti spiego. Ci dicono ternari perché noi ci riproduciamo facendoci in tre per i nostri figli. Letteralmente. Ci scomponiamo in tre copie ridotte, ma del tutto simili a noi stessi. Tutto questo è ben illustrato nel disegno riprodotto in Figura 8 che rappresenta un drago immediatamente prima e dopo il parto. E' per questo che non possiamo avere sorelle!»

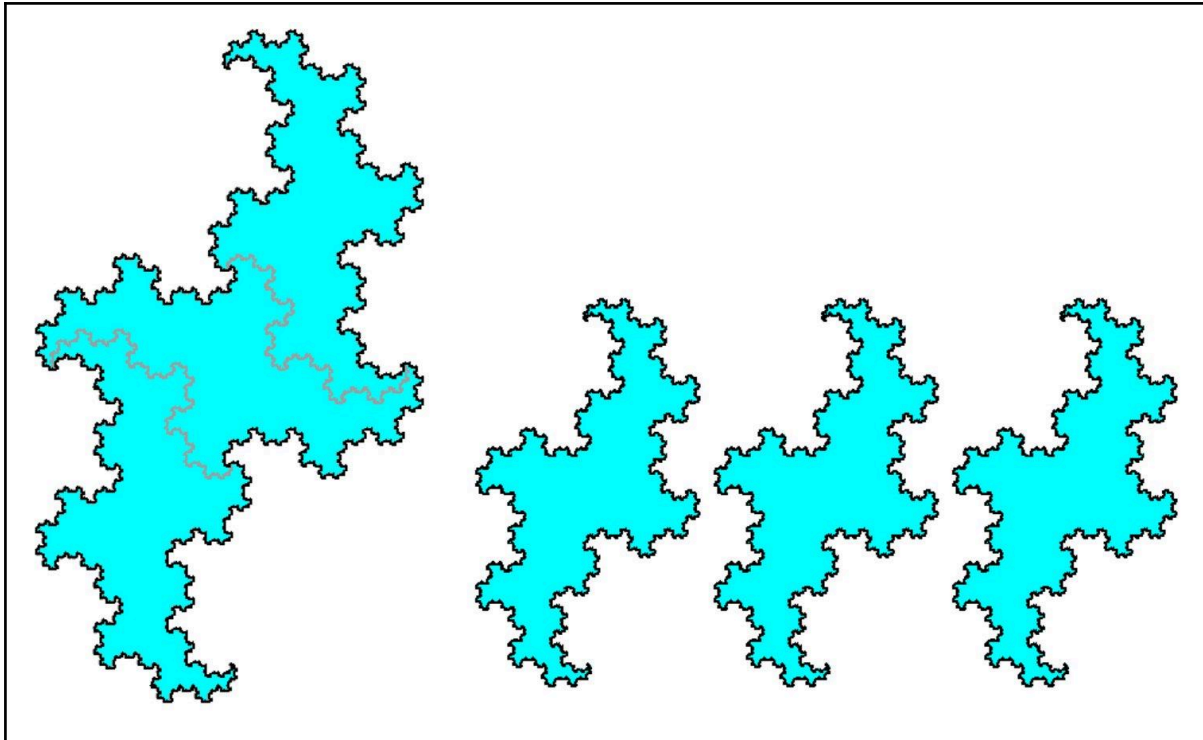


Figura 8: Il drago ternario si fa in tre per i propri figli. Si riproduce così per scissione. Eccone uno immediatamente prima e subito dopo il parto

**Far:** «Ti devo spiegare molte cose. Noi non abbiamo un solo modo per nascere. Sì, la replicazione può considerarsi una sorta di riproduzione, ma i cloni così ottenuti, essendo tutti copie identiche l'uno dell'altro, sono ben poco interessanti dal punto di vista genetico.»

**Ter:** «In effetti, pensandoci bene, conoscere i miei fratelli è una noia mortale, essendo del tutto identici a me, perfino nel nome, non mi dicono mai nulla di nuovo. Ugualmente non ho nessun desiderio di



conoscere mio padre perché, in parte identica, sono io stesso...»

**Far:** «Infatti...»

**Ter:** «Ma... Ma voi, però, - azzardò Ter con qualche dubbio in cuor suo- voi farfalle non potete riprodurvi così, questa è una prerogativa di noi draghi detti appunto ternari.

Noi ne andiamo fieri, è ciò che più ci distingue!»

**Far:** «Caro Ter, mi dispiace deluderti, ma anche noi farfalle abbiamo ereditato le vostre caratteristiche. Anche noi, come voi, fratellini miei, potremmo, a buon diritto, essere dette ternarie . Ecco un disegno in Figura 9 realizzato e recapitatomi in tempo reale dalle gentilissime tartarughe: illustra questa nostra capacità, quasi identica alla vostra se non fosse per un piccolo dettaglio. Riesci a trovarlo?»

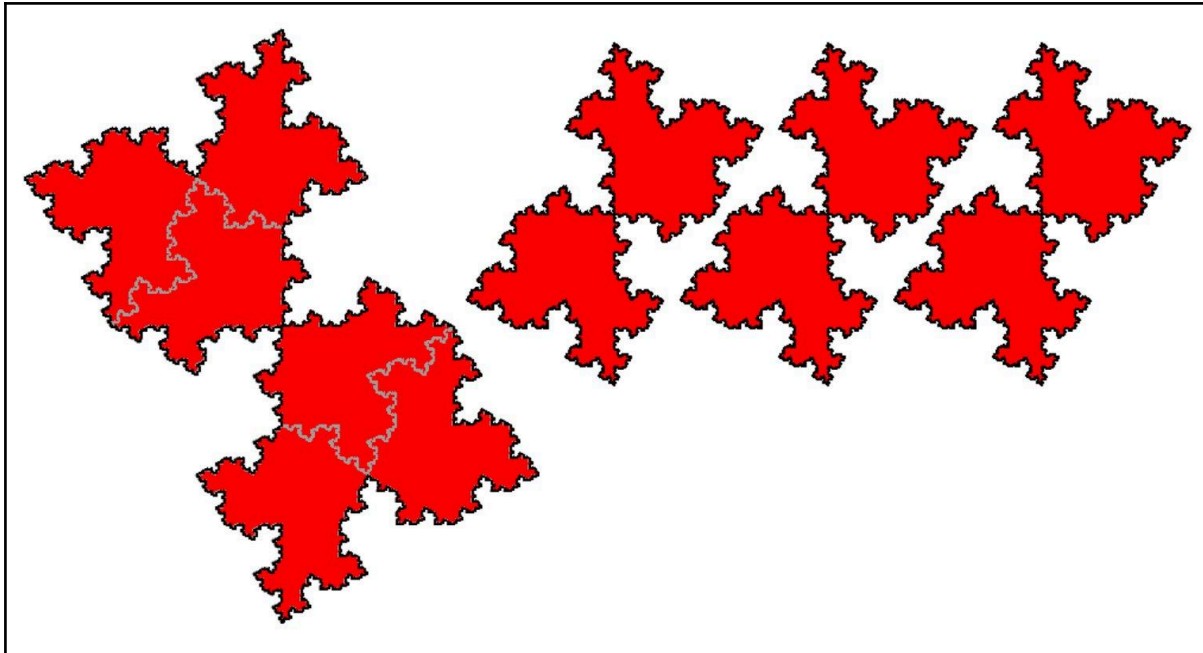


Figura 9: Anche la farfalla può dirsi ternaria anche se la sua prole differisce per un dettaglio.

**Ter:** «Sono sbalordito! Mi sembrano copie identiche sin nei minimi particolari!»

**Far:** «È così infatti, eppure un dettaglio ci diversifica.»

**Ter:** «Sì, sì ... Hai ragione! Si scambia la destra con la sinistra come accade con le immagini allo specchio! Quindi bisognerà aspettare le nipoti perché siano in tutto identiche alla nonna.»

**Far:** «Esattamente.»

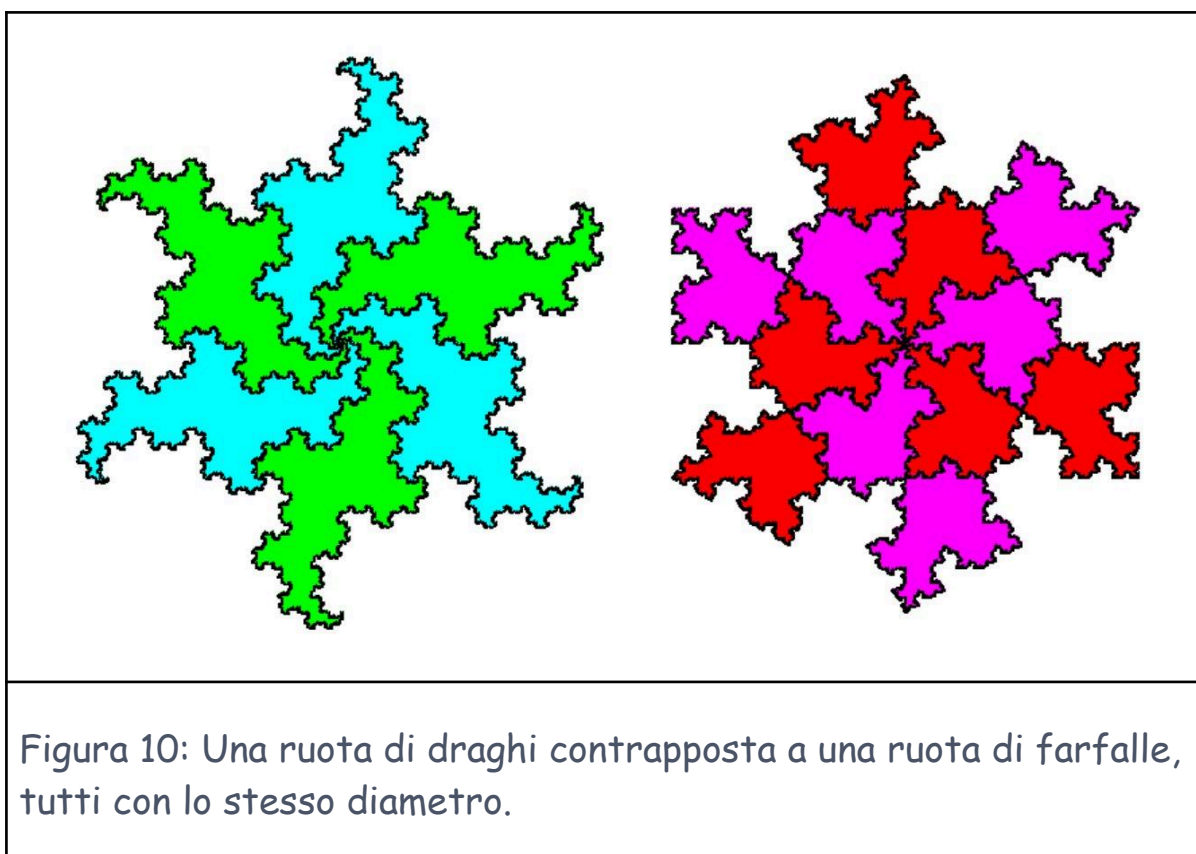
## 5. Il confronto

**Ter:** «Ma...non avrai mica tutte le proprietà di un drago ternario? Assurdo! No, non credo proprio che sia possibile per nessuno, tantomeno per una farfalla!»

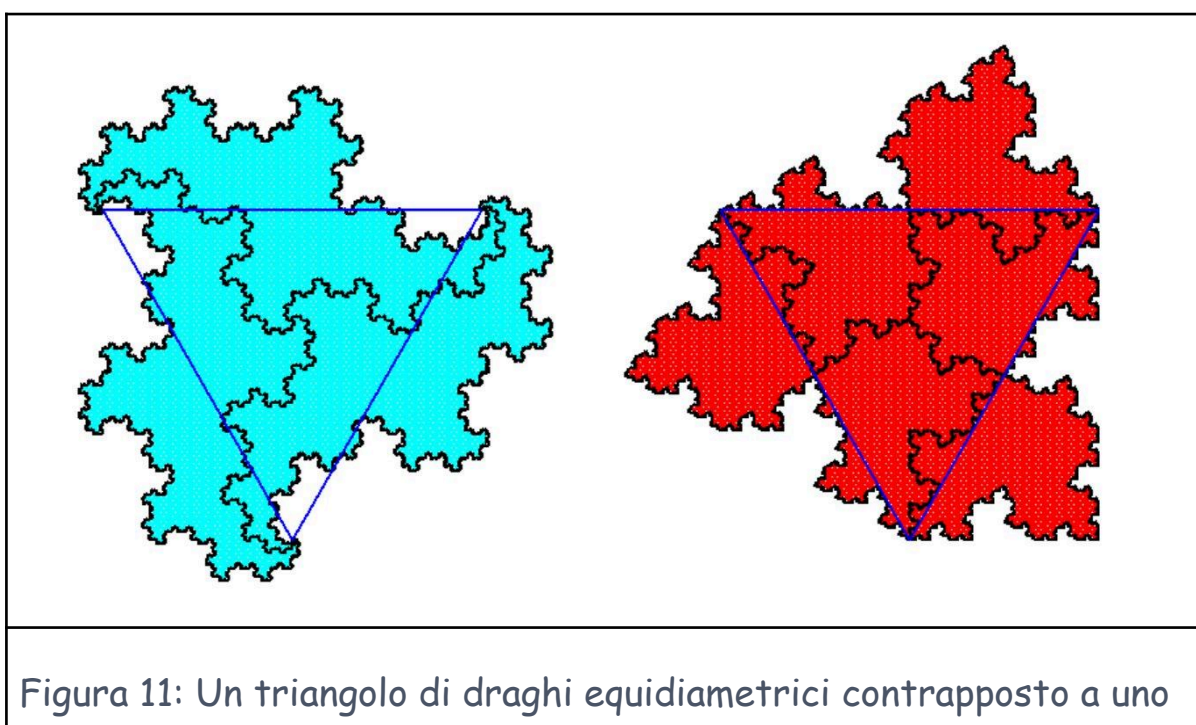
**Far:** «No? -disse in tono di sfida - dimmi quali sono e ti mostrerò che noi farfalle possiamo fare cose che, se pure non uguali, sono strettamente corrispondenti alle vostre!»

**Ter:** «Un gruppo di sei di voi farfalle di uguale taglia può fare una magnifica ruota? Sapete combaciare perfettamente in tre individui dallo stesso diametro, formando una sorta di triangolo dai lati uguali? Può, infine, una moltitudine di voi ricoprire perfettamente un piano senza sovrapposizioni e senza lasciare spazi vuoti?»

**Far:** «Rispondo sì a tutte e tre le tue domande e te lo mostrerò con le immagini seguenti, Figure 10, 11, 12.»



**Ter:** «Magnifica anche la vostra ruota! Noto solo ora che le vostre ali hanno la forma di un draghetto!»





di farfalle equidiametriche

**Ter:** « Anche la vostra formazione a triangolo non è inferiore alla nostra! »

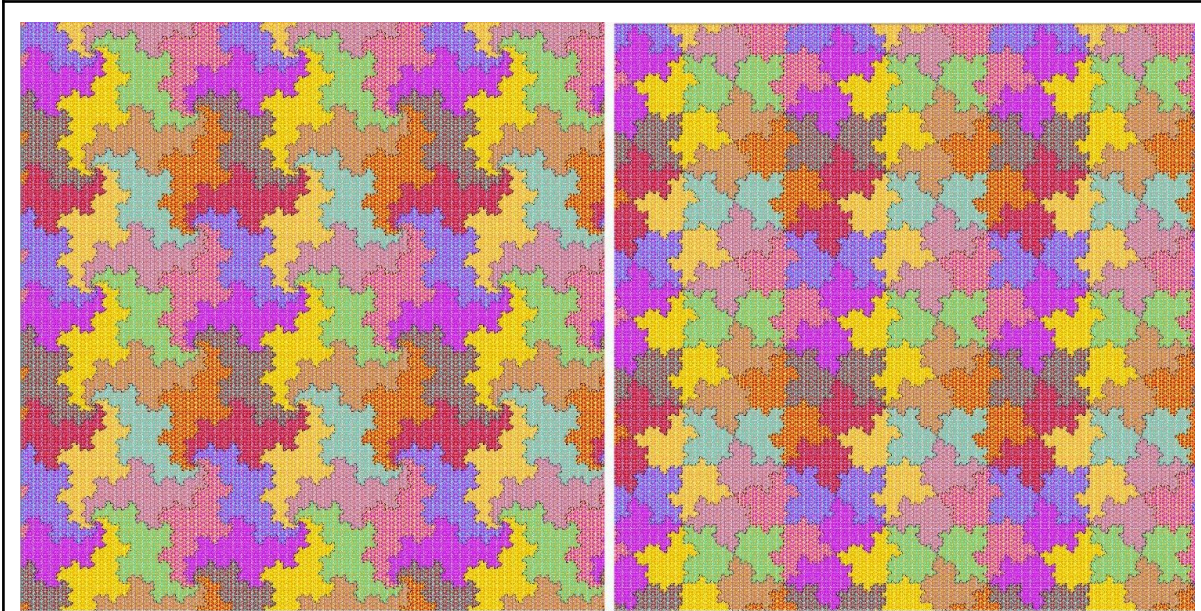


Figura 12: Tassellazione del piano con draghi contrapposta a tassellazione del piano con farfalle.

**Ter:**« Eccezionale! La vostra maestria nel tassellare il piano corrisponde perfettamente, diametro per diametro, colore per colore, alla nostra!

Stupefacente! Non avrei mai creduto! Ma di fronte a tanta evidenza devo arrendermi. Non so come tu possa essere mia sorella, ma dopo quel che ho visto non posso più negare che abbiamo molto in comune!»

## 6. Genetica frattale

**Far:** «Bene. Allora credo sia giunto il momento di continuare sulla questione delle nostre aree coincidenti, rimasta in sospeso.»

**Ter:** «D'accordo. Sono molto curioso e spero di riuscire a capire.»

**Far:** «Sappi allora che il nostro genitore comune è un segmento.»

**Ter:** «Un semplice segmento della geometria ordinaria? Come è possibile? Non abbiamo un secondo genitore?»

**Far:** «Sì, lo abbiamo, ma è molto più difficile da rappresentare.»

**Ter:** «È un drago?»



**Far:** «No, né un drago né una farfalla. È un algoritmo ricorsivo.»

**Ter:** «Un algoritmo?»

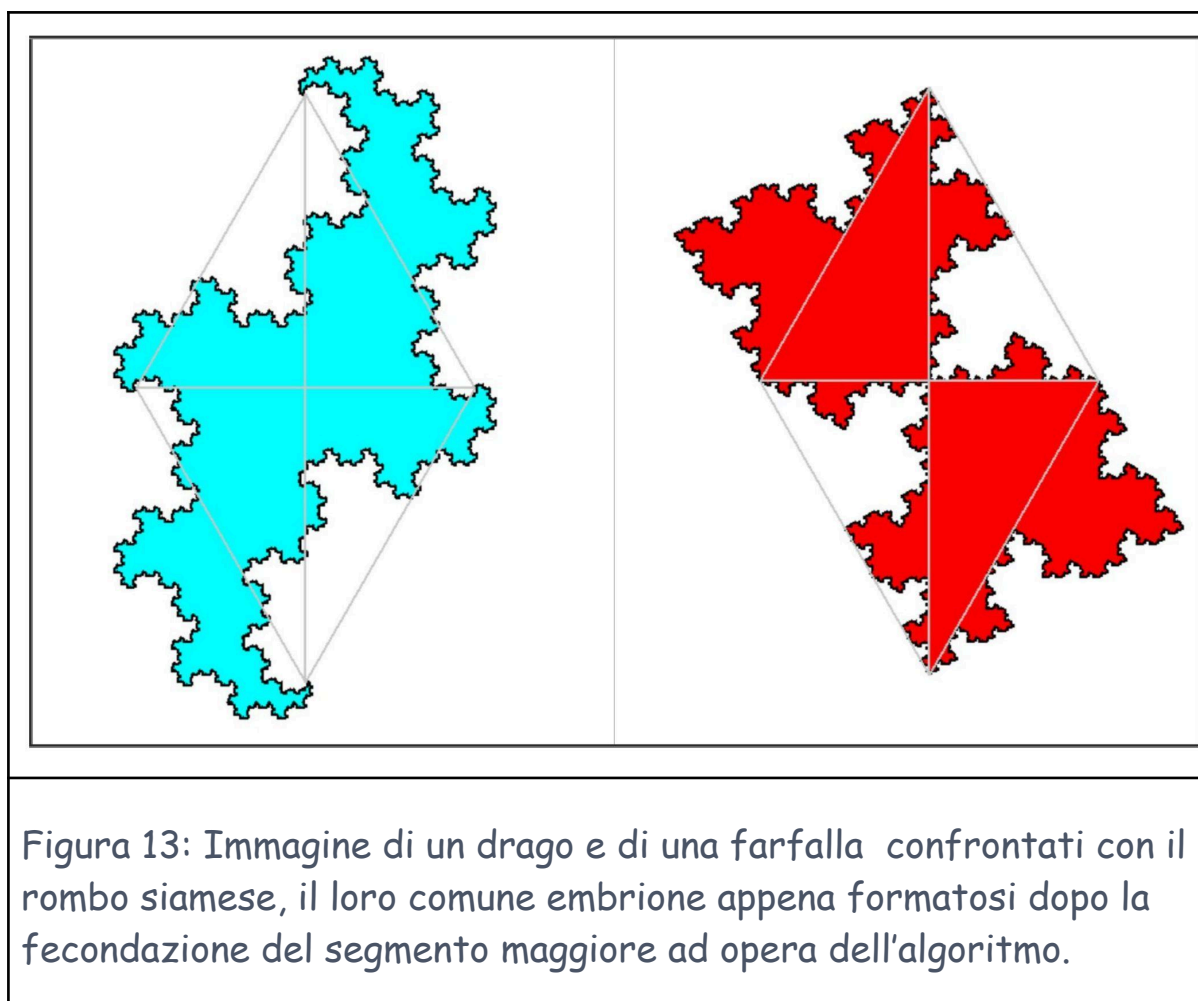
**Far:** «Sì, questo algoritmo feconda il segmento. Dopo di che si crea un embrione. Lo stesso in molte varianti genetiche.»

**Ter:** «Come la mia e la tua?»

**Far:** «Esattamente.»

**Ter:** «Come è fatto questo embrione?»

**Far:** «È un rombo siamese. Un rombo che si ottiene da due triangoli dai lati uguali uniti da un lato comune poi trasformato in diagonale minore. Il suo diametro è la diagonale maggiore, la sua area, non a caso, è proprio la nostra! Intanto guarda il disegno in cui le nostre immagini sono confrontate con lui.»



**Ter:** «I nostri diametri coincidono con quello embrionale! Ma l'embrione, nel suo sviluppo, non dovrebbe crescere aumentando le sue dimensioni?»

**Far:** «Non nel nostro caso. A crescere non è l'area ma sono i suoi lati che crescono in progressione geometrica: 4,8,16,32... raddoppiando ogni volta, proprio come le cellule biologiche.»

**Ter:** «Sì, ma come si modifica in pratica questo embrione?»

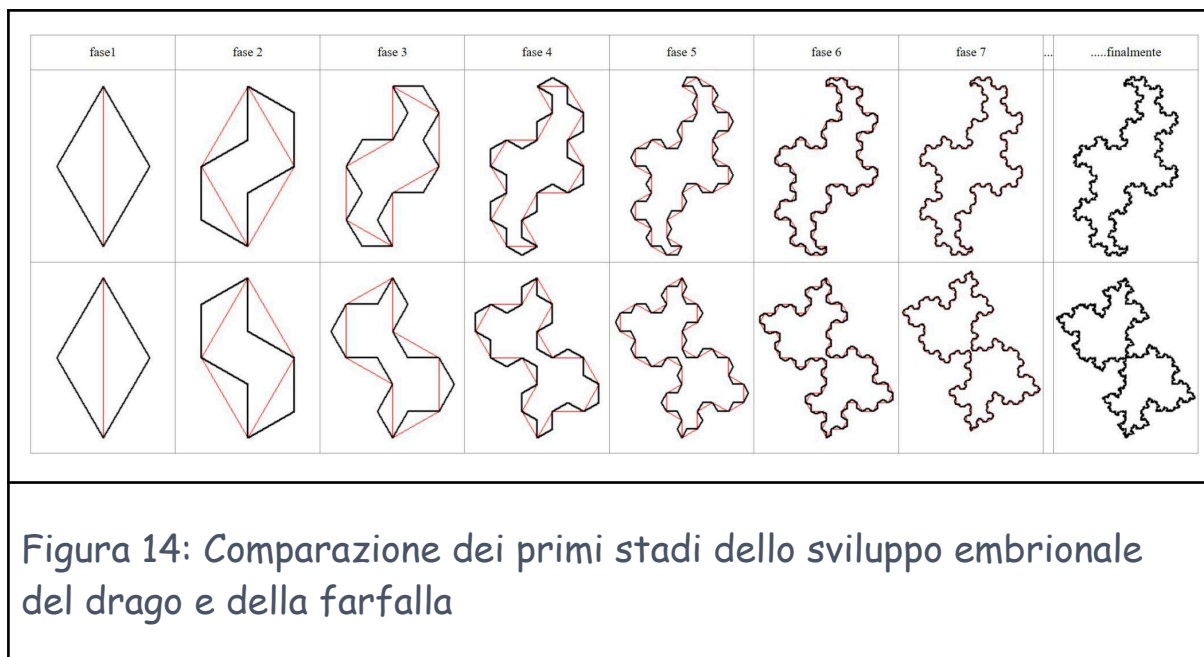
**Far:** «Ogni segmento, in una data fase, viene sostituito con due segmenti più piccoli uguali tra loro. Insieme formano un triangolo isoscele simile a un rombo siamese dimezzato, come Medardo di Terralba nel romanzo di Calvino. Non la metà fatta da due triangoli equilateri ma quella che ha per base la maggior diagonale.»

**Ter:** «Sì, ma da quale parte del segmento avviene questa sostituzione?»

**Far:** «Sia nel mio caso che nel tuo la sostituzione avviene, in ogni fase, alternando la costruzione da una parte e dall'altra.»

**Ter:** «Allora perché lo sviluppo finale non è coincidente.»

**Far:** «Guarda la tavola disegnata in Figura 14 dove c'è una comparazione dello sviluppo dei nostri embrioni. Ogni volta la fase precedente è riportata in rosso per rendere evidente, in una particolare fase, le sostituzioni effettuate.»



**Ter:** «Vedo che queste sostituzioni mutano la forma del rombo in un poligono con un numero crescente di lati.»

**Far:** «Sì, certo. Nota che l'alternanza delle parti fa sì che una volta si aggiunga un'area e un'altra si tolga.»

**Ter:** «È vero! questo spiega il mistero dell'area che condividiamo con il nostro comune embrione, il rombo siamese!»

**Far:** «Come puoi osservare noi siamo il limite di poligoni con un numero crescente di lati!  
Gli umani chiamano questi poligoni irregolari, ma in realtà nel nostro caso una regola c'è. Eccome!»

**Ter:** «Di quanti lati è costituito il nostro perimetro?»

**Far:** «Infiniti! Infatti il nostro perimetro, come quello del famoso fiocco di neve di Koch (Figura 17), è infinito.»

**Ter:** «Ecco perché a scuola non ci hanno fatto studiare la misura del nostro perimetro! Siamo davvero creature incredibili!»

## 7. Stringhe

**Far:** «A questo punto, se ti interessa, posso spiegarti anche cosa differenzia noi due.»

**Ter:** «Sì, sì, spero non sia troppo complicato per me, non credevo mi piacesse tanto capire! È emozionante provare a scoprire i misteri dell'esistenza!»

**Far:** «Bene, mi fa molto piacere che tu sia interessato. È questa la cosa più importante.»

**Ter:** «Grazie a te, sorellina, mi sto appassionando all'argomento. E sto prendendo coscienza della mia vera natura!»

**Far:** «Bene, bene, carissimo Ter. La prima fase, cioè la formazione dell'embrione, come vedi, è la stessa per me e per te. Iniziamo quindi dalla seconda fase considerando la prima trasformazione in basso a sinistra. Per aiutare la memoria scriviamo da qualche parte "+" se la trasformazione del segmento in due più piccoli fa aumentare l'area del poligono e "-" se la fa diminuire. Saliamo poi lungo il diametro continuando a riassumere con un segno ciò che osserviamo allungando la nostra serie di caratteri. Arrivati all'altra estremità del diametro discendiamo dalla parte destra continuando ad annotare fino in fondo.»

**Ter:** «Alla fine cosa otteniamo?»

**Far:** «Otteniamo una stringa di caratteri in sequenza che ci riassume ciò che abbiamo notato.

Nel tuo caso abbiamo "+-+-" nel mio invece "-+-+"

Hai capito la corrispondenza?»

**Ter:** «Mi sembra di sì. Hai messo più quando la sostituzione del segmento fa aumentare l'area e meno quando la fa diminuire. I meno si alternano con i più e sono tanti quanti i più, dunque a fine giro la figura in nero ha la stessa area di quella precedente in rosso.»



**Far:** «Perfetto. Sapresti continuare?»

**Ter:** «Nella terza fase i segmenti raddoppiano e ci sono quindi otto segmenti rossi da trasformare in 16 neri. Allora risulta +-+-+--+ per me e -esitando- lo stesso identico anche per te!»

**Far:** «Sì, bene, e poi?»

**Ter:** «Nella quarta fase le nostre stringhe si diversificano di nuovo; risultano

"+-+-+--+--+--+-" per noi draghi e

"-+-+-+--+--+--+-" per voi farfalle.»

**Far:** «Molto bene. Avrai notato che in realtà solo il primo carattere di ognuna di queste stringhe è importante. Il resto è facilmente prevedibile.»

**Ter:** «Credo proprio di aver capito!. Noi draghi abbiamo stringhe di più e meno alternati che continuano a iniziare con lo stesso segno mentre voi farfalle alternate anche il segno di inizio a ogni nuova fase dello sviluppo embrionale!»

**Far:** «Sì, solo questo è ciò che ci differenzia. Non deve stupire dunque che abbiamo molte proprietà in comune.»

**Ter:** «Certo, tutto così diventa comprensibile!»

**Far:** «Quando, anni fa, per il Tartapelago, nel vasto web, furono pubblicate alcune animazioni dedicate a me, in altre il soggetto eri tu, ma non comparivi come drago e neppure io come farfalla. Il nome per entrambi era "petalo di fior di triangolo" dove i triangoli, a cui pure furono dedicate animazioni, erano quelli in Figura 11. Solo un aggettivo finale ci distingueva. Continuo per te e alternato per me!»

**Ter:** «Davvero? Andrò a vedere. Finora mi è sfuggito, forse perché non si parlava di draghi.»

**Far:** «Te lo consiglio. Ecco la url:»

<http://www.pietrocola.eu/maecia/tartapelago/frattali/petalo.htm>

## 8. Fratelli

**Ter:** «Sono molto contento di aver capito! Ti ringrazio molto. Comincio ad amare la mia sorellina e la cultura che mi ha trasmesso. Non so come ho

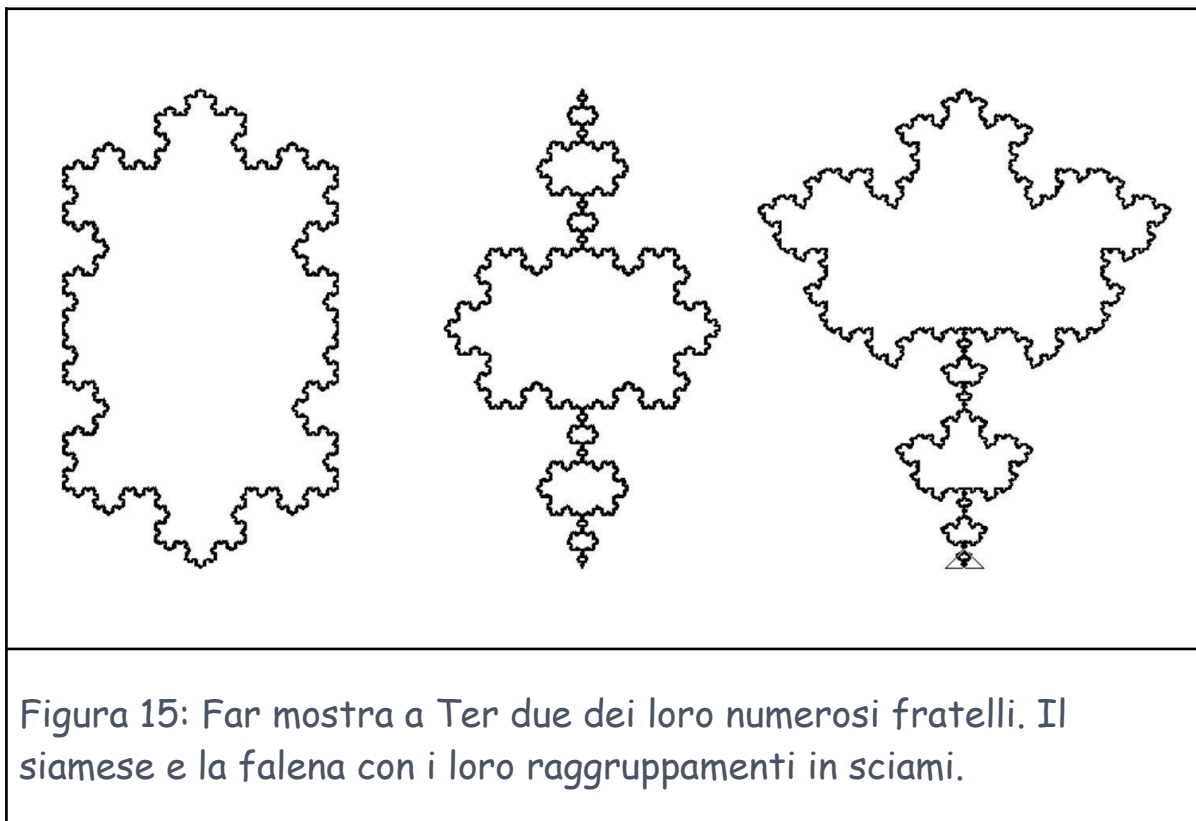
potuto vivere per tanto tempo in uno stato di ignoranza. Ora però ho una domanda che potrebbe aprirmi a un nuovo mondo. Abbiamo altri fratelli?»  
Ci sono altri figli del segmento e di quel misterioso algoritmo generatore?»

**Far:** «Ebbene sì, abbiamo fratelli e sorelle, più e meno noti! Neppure io so quanti siano esattamente. Il fatto è che siamo figure complesse; forse queste relazioni familiari, prese in prestito dal mondo degli umani, andrebbero ripensate.  
Si potrebbe parlare più propriamente di affinità genetica. Tra tutti i "fratelli", ma non le sorelle, di cui sia a conoscenza tu sei quello con cui ho maggiore affinità genetica.»

**Ter:** «A questo punto sarei curioso di conoscere almeno qualcuno di questi altri nostri fratelli!»

**Far:** «Bene, ti accontento subito. Ecco in Figura 15 due nostri fratelli che hanno affinità genetiche con noi ma soprattutto tra di loro. Le due figure sono state scoperte dal Prof che ho già nominato, uno scopritore di talenti frattali al quale sono molto grata! Per suo conto sono poi state disegnate dalle tartarughe del Logo e trasmessi qui a Fratlandia dal Tartapelago per via telepatica. I fratelli che ti sto

presentando sono il siamese e la falena.»



**Ter:** «Magnifico, non li conoscevo! Il siamese usa il famosissimo merletto di Koch. La falena invece ti somiglia, ti somiglia molto!»

**Far:** «Moltissimo, usiamo lo stesso merletto, il nostro perimetro è il cosiddetto merletto dei lepidotteri. Peccato che ci frequentiamo poco perché le falene sono farfalle con abitudini notturne. Comunque, in assoluto, tra i numerosi fratelli e sorelle le falene sono quelle con cui ho la massima affinità genetica!»

**Ter:** «La somiglianza è impressionante!»

## 9. Abilità e somiglianze

**Far:** «Guarda il profilo sinistro dello sciame di falene e confrontalo con il mio profilo sinistro: sono identici! Poi però è come se il diametro fungesse da specchio per formare l'intero sciame.»

**Ter:** «È vero! È come se in te la parte a destra del tuo diametro, con tutta la sua area, si fosse ribaltata!»

**Far:** «Sì, sì. Noi farfalle siamo forti nelle metamorfosi! -esclamò vantandosi un pochino-»

**Ter:** «Quindi lo sciame di falene, considerato come un solo individuo ha esattamente la tua e quindi anche la mia area, che, come detto, è un sesto,  $d$  al quadrato, per radice di tre!»

**Far:** «Hai proprio ragione, non ci avevo riflettuto. Sei un ottimo allievo che, in questo caso, ha superato la sua maestra, complimenti!»

**Ter:** «Grazie sorellina. È un piacere ragionare con te. Ma dimmi questi strani sciami da quanti individui sono formati?»

**Far:** «Infiniti individui, sempre più piccoli!. Le dimensioni delle aree decrescono. Ogni volta, sia per i siamesi che per le falene, sono tre volte più piccoli.»

**Ter:** «Vedo però che l'area della colonia di siamesi è diversa dalla nostra.»

**Far:** «Vero. Il motivo ti sarà chiaro quando potrò mostrarti il loro sviluppo embrionale.»

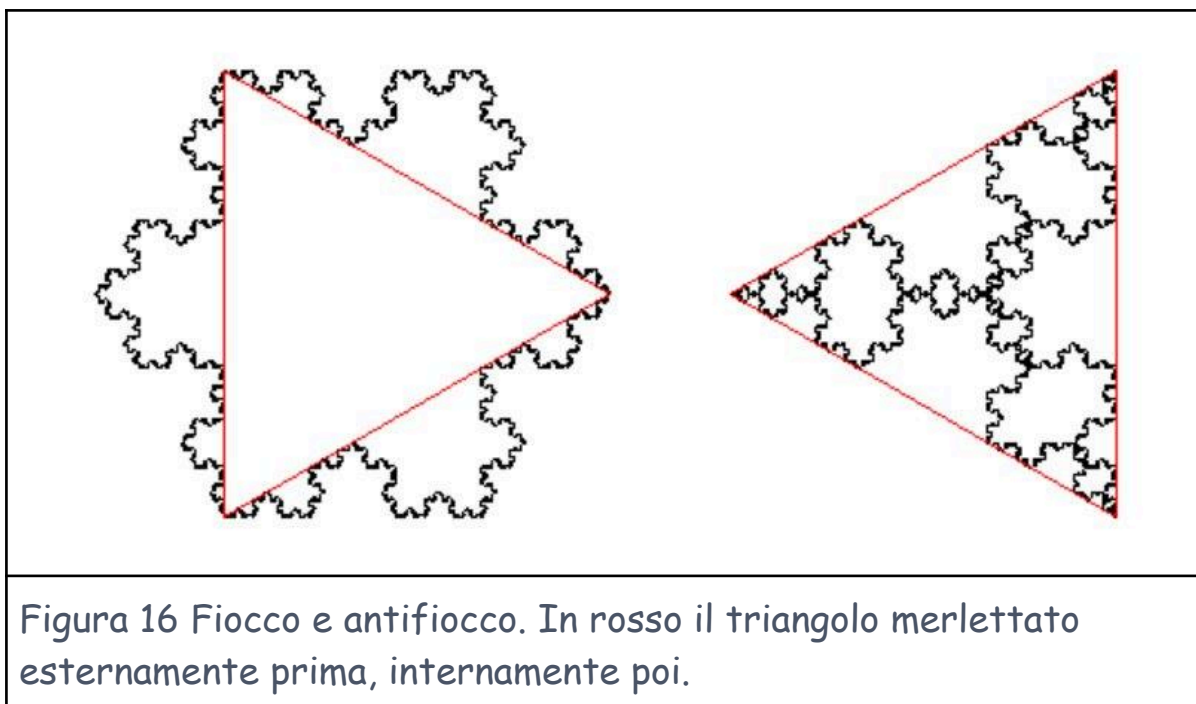
**Ter:** «Il siamese assomiglia invece al famoso fiocco di neve di Koch.»

**Far:** «Sì, è una sua variante allungata, è come se due fiocchi si fossero fusi in uno solo.»

**Ter:** «La sua forma però, da qualche parte, l'avevo già vista.»

**Far:** «Probabilmente nell'antifiocco di neve di Koch.»





**Ter:** «Sì, sì. Ora ricordo!»

**Far:** «In effetti era sotto gli occhi di tutti ma è stato il Prof, a quanto pare, a lanciarlo mostrando a tutti le sue eccezionali qualità di tassellatore e di replicante.»

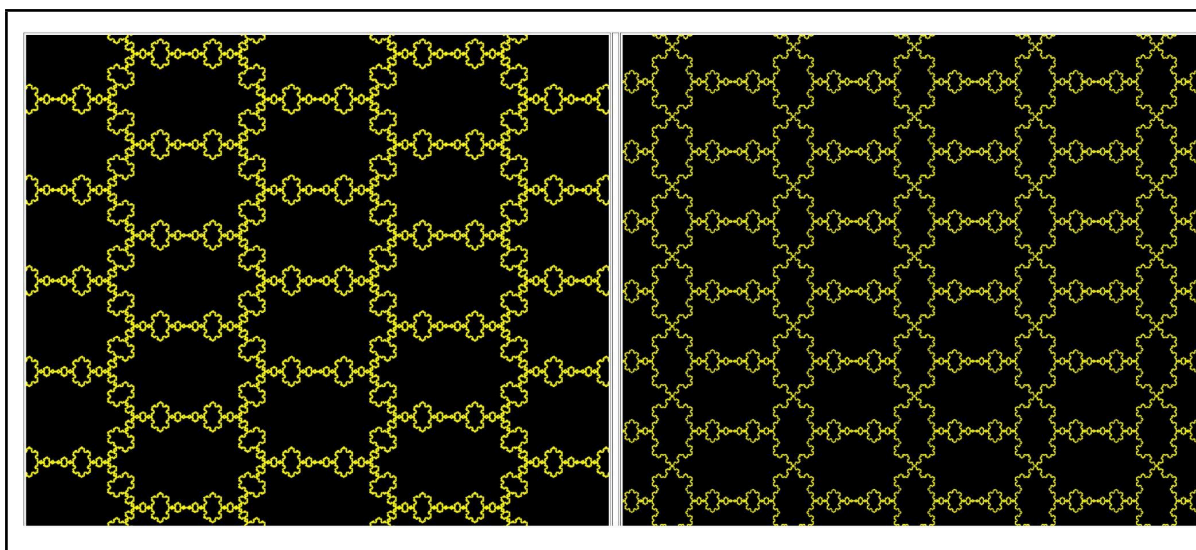


Figura 17 Due tassellazione "filateliche" che ricoprono il piano di soli siamesi.

**Ter:** «Davvero originale questo modo frastagliato di tassellare il piano che hanno i siamesi!»

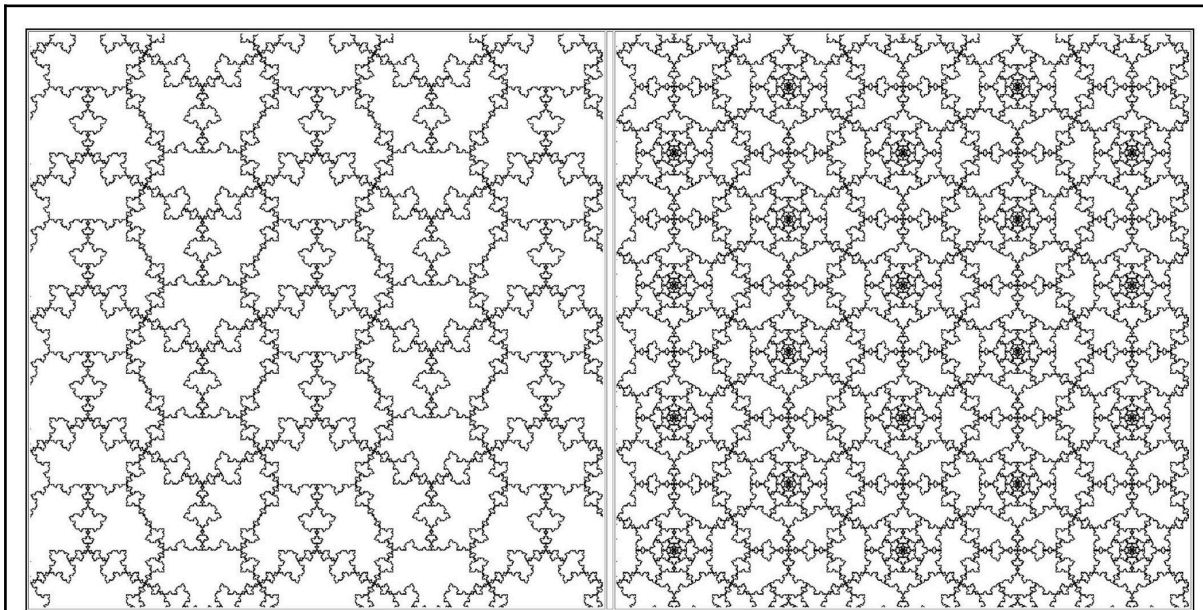


Figura 18 Due tassellazione che ricoprono il piano di sole falene

**Far:** «Le mie sorelline non sono da meno. Guarda in Figura 18 quanta armonia. Guarda cosa sa fare una infinità di falene di taglia decrescente. Che io sappia non esistono in questo nostro mondo altri come loro due!»

**Ter:** «Non avevo mai visto sciami di frattali di taglia variabile intrecciarsi armoniosamente in trame tanto intricate!»

## 10. Replicanti infiniti

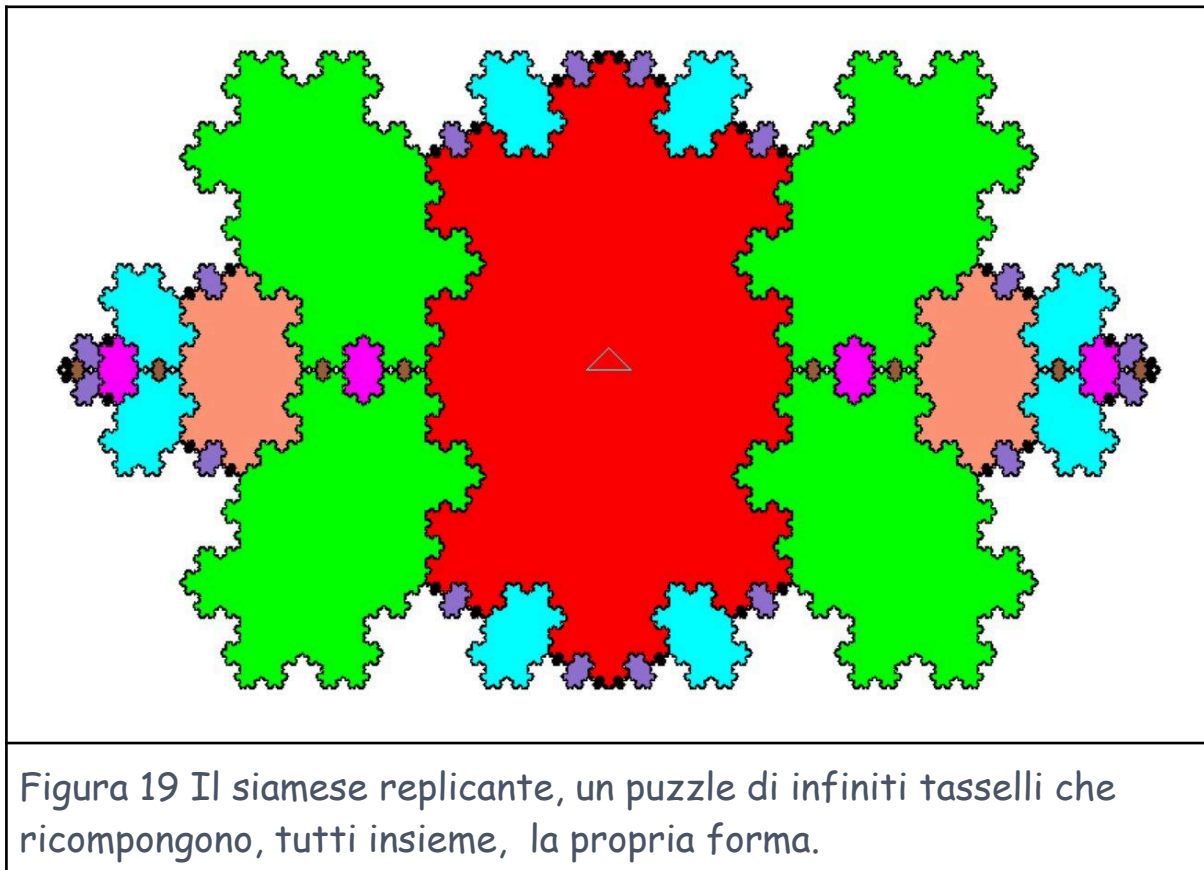
**Far:** «I nostri due fratelli condividono un'arte. Anche per quanto riguarda la replicazione.»

**Ter:** «In che modo si replicano? Sono ternari anche loro, come noi?»

**Far:** «No. Non possono scomporsi in un certo numero di forme identiche come facciamo noi ma possono farlo con loro simili che mantengono la forma ma non le dimensioni. Si possono scomporre però solo in infinite copie, sempre più piccole.»

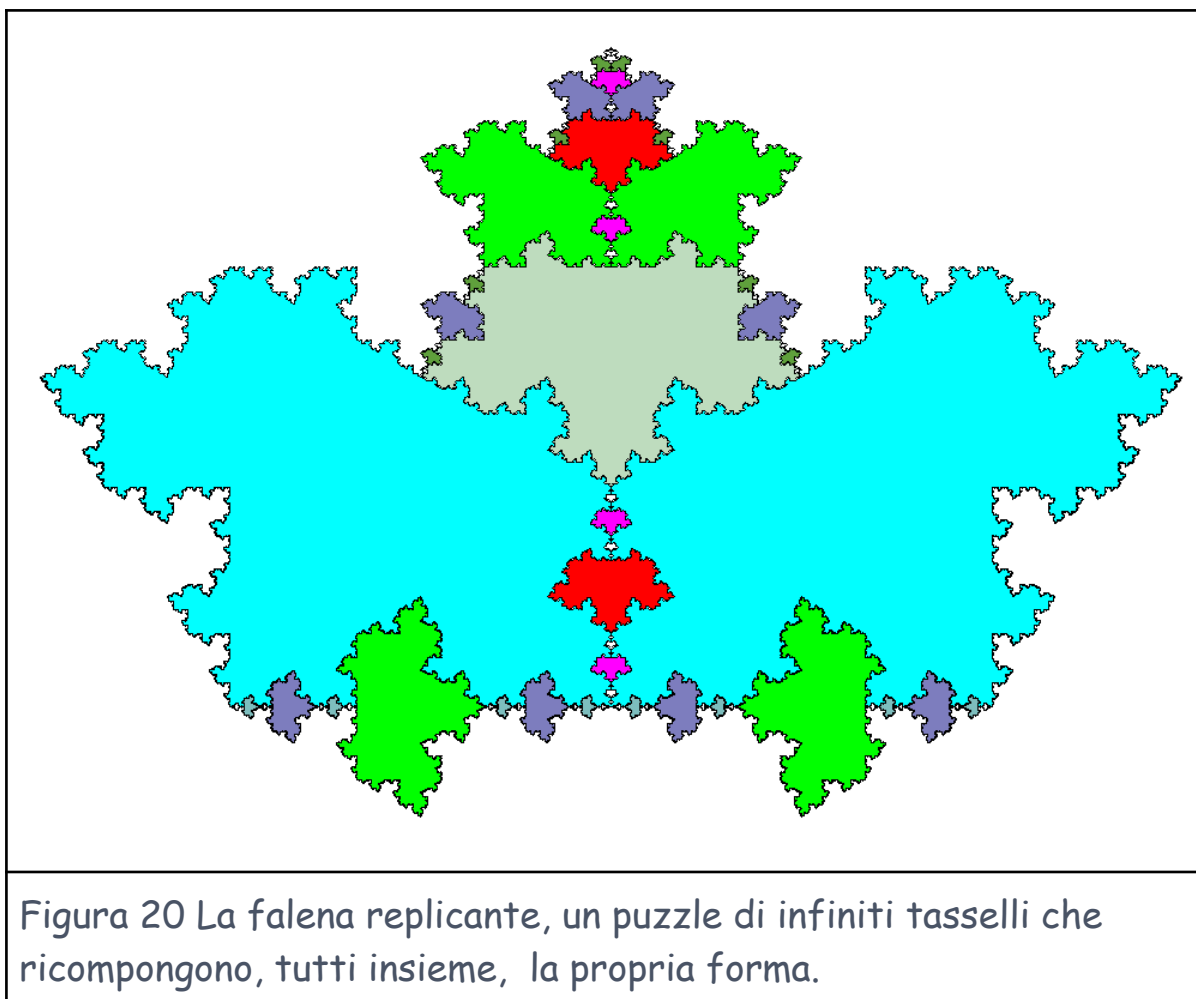
**Ter:** «Replicanti di ordine infinito? Questa mi giunge nuova. Come è possibile?»

**Far:** «Guarda in Figura 20, la tartaruga del Logo, al centro, ci mostra il suo disegno che spiega in che modo si frantuma un siamese per replicarsi!»



**Ter:** «Eccezionale!»

**Far:** «Solo la falena, che io sappia, è in grado di fare altrettanto! Come mostrato in Figura 20.»



**Ter:** «Sono incantato!»

**Far:** «Mentre le dimensioni delle aree, sottolineate dai colori, diminuiscono, ridotte ogni volta ad un terzo del precedente, il numero delle taglie uguali aumenta raddoppiando in due progressioni geometriche che si intrecciano alternandosi: 2 (azzurri) 1 (grigio) 4(verdi) 2 (rossi) 8 (viola) 4 (magenta) 16 (verde scuro) ...»



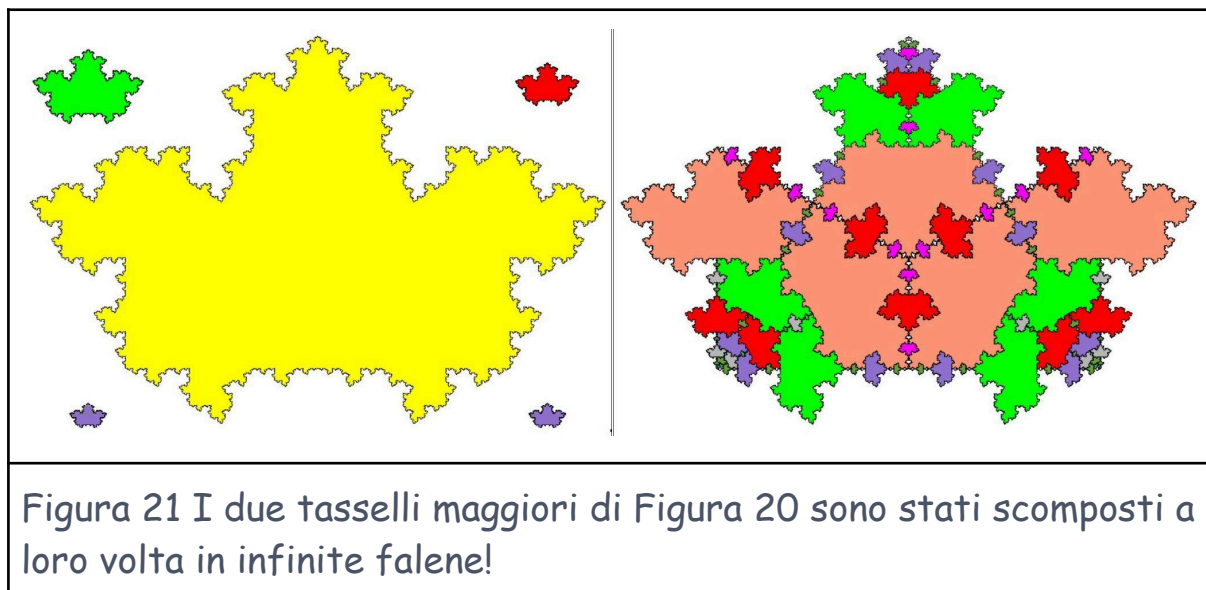
**Ter:** «È vero! Fammi provare con il siamese replicante di Figura 19:

1 (rosso) 4 (verdi) 2 (arancioni) 8 (azzurri) 4 (magenta) ...Sempre due progressioni geometriche intrecciate!»

**Far:** « Questa proprietà di replicanti infiniti aumenta enormemente la già grande capacità di tassellare il piano in quel loro modo caratteristico.»

**Ter:** «Sì? In che modo? Qual è il nesso tra tassellazione e replicazione?»

**Far:** «Se, per esempio, in Figura 20 scomponiamo a sua volta uno qualsiasi dei tasselli, otteniamo una nuova scomposizione.»



**Ter:** «Questo amplia enormemente le possibilità. Noi frattali dovremmo essere abituati agli effetti della ricorsività ma mi gira un po' la testa pensando a tutte queste possibilità!»

**Far:** «Anche a me un po'. Guarda in Figura 22 un esempio di variazioni nella pavimentazione con soli siamesi che sfruttano questa possibilità di scomposizione di un qualsiasi tassello in infiniti tasselli simili!»

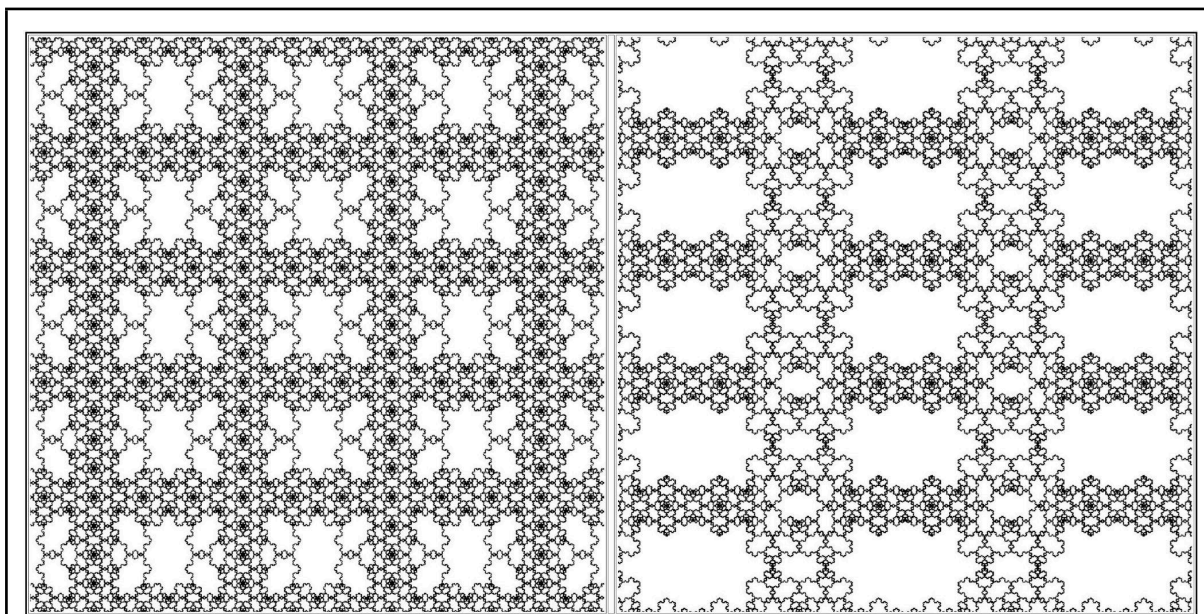
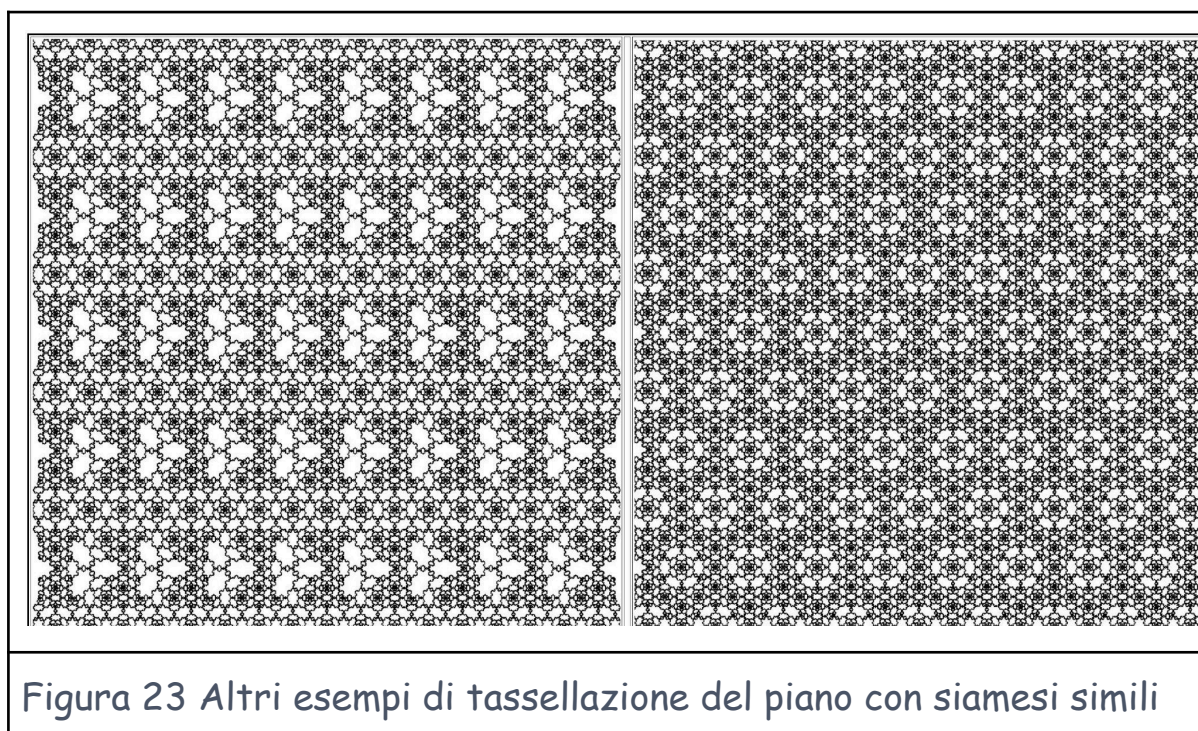


Figura 22 Esempio di tassellazione del piano con siamesi simili che sfrutta la replicazione.

**Ter:** «Un'incredibile varietà! Mai visto nulla del genere. Si potrebbe sfruttare questa conoscenza aprendo un negozio di pavimentazioni o producendo carta da parati qui a Fratlandia!»

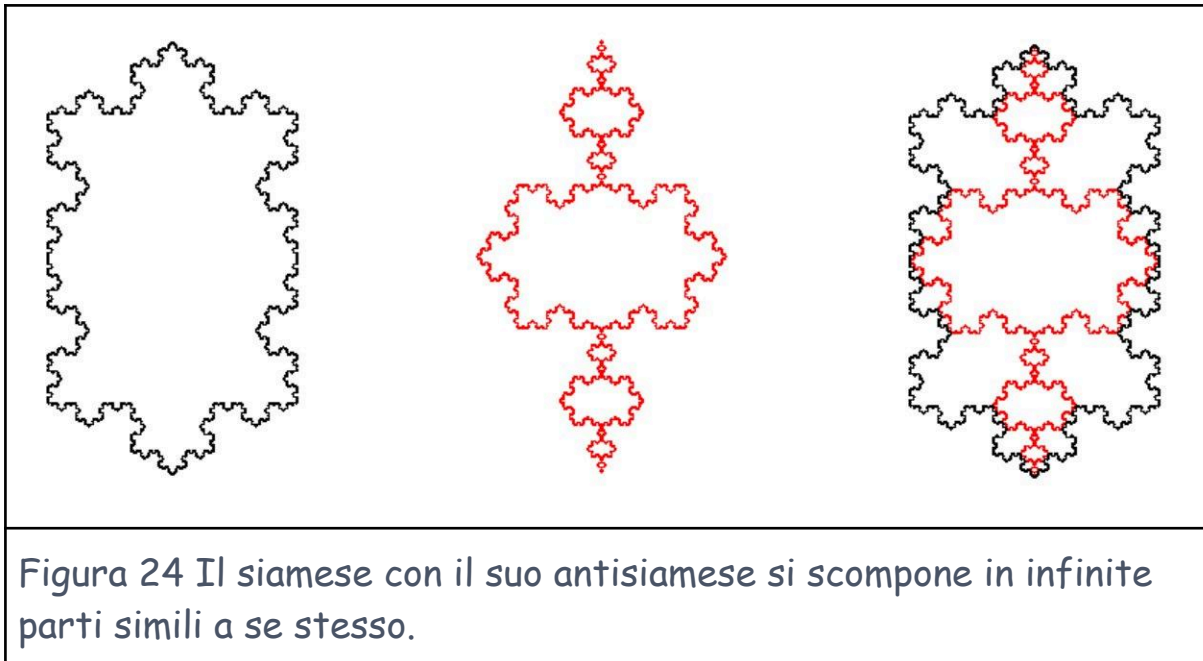




**Far:** «Nuove conoscenze aprono sempre un mondo inesplorato di nuove possibilità...»

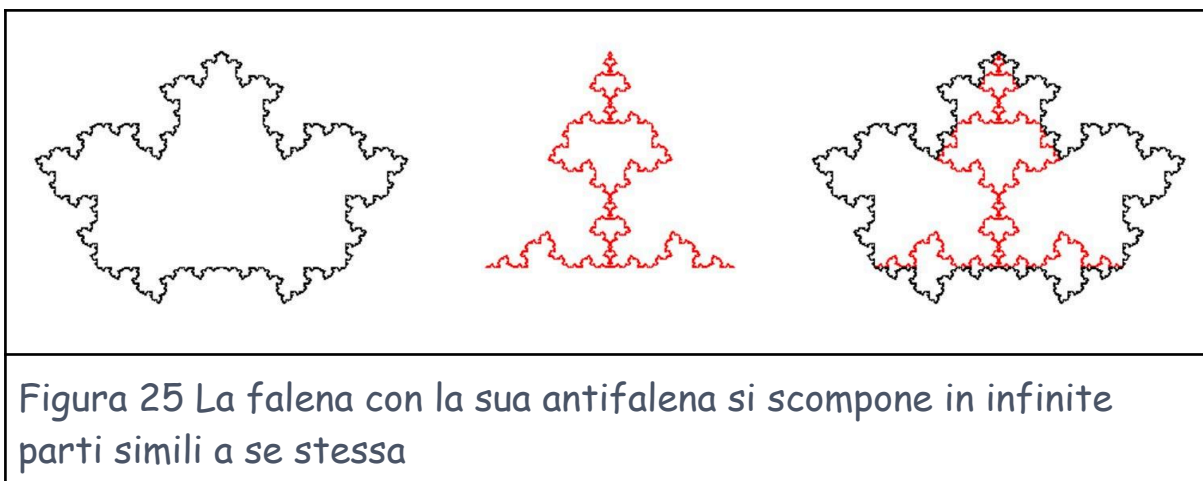
**Ter:** «Mi sembra, ma non ne sono sicuro, che la figura 19 sia formata da un siamese e, internamente, dal suo sciame!»

**Far:** «Proprio così, complimenti, è per questo che lo sciame di siamesi è chiamato antisiamese. Puoi vedere questo ben rappresentato in Figura 24.»



**Ter:** «Per la falena però non accade lo stesso!

**Far:** «No, anche la falena ha la sua antifalena ma non è il suo sciame come mostrato in Figura 25.»



**Ter:** «Curiosa l'antifalena è una colonia di falene con una base che sembra sostenerla.»

**Far:** «Sì, è una sorta di triangolo equilatero frattale con cui si potrebbe tassellare il piano, più o meno come si fa con i triangoli equilateri, ottenendo, alla fine, una tassellazione di sole falene.»

**Ter:** «Certo! I lati a contatto generano nuove falene! Cosa analoga potrebbe farsi con il classico antifiocco di neve di Koch (Figura 16) ottenendo però una tassellazione del piano di soli siamesi.»

**Far:** «Complimenti! Hai imparato a vedere anche ciò che non ti ho ancora detto!»

## 11. Sviluppi comparati

**Ter:** «Il siamese e la falena hanno molto in comune!»

**Far:** «Sì, hanno una forte affinità genetica tra di loro, proprio come noi, ma diversamente.»

**Ter:** « - continuando le sue riflessioni- Anche gli sciami di falene e di siamesi in qualche modo mi sembrano replicanti.»

**Far:** «Sì, per esempio lo sciame di siamesi, che il Prof chiama antisiamese (al centro di Figura 15), può scindersi in tre parti. La parte centrale è un siamese le altre due sono sciami più piccoli ma del tutto simili al genitore!»

**Ter:** «Anche lo sciame di falene può scindersi in tre parti: la falena grande nel primo terzo di diametro, uno sciame con falena centrale nel secondo e una copia in miniatura dello sciame originario nell'ultimo terzo di diametro.»

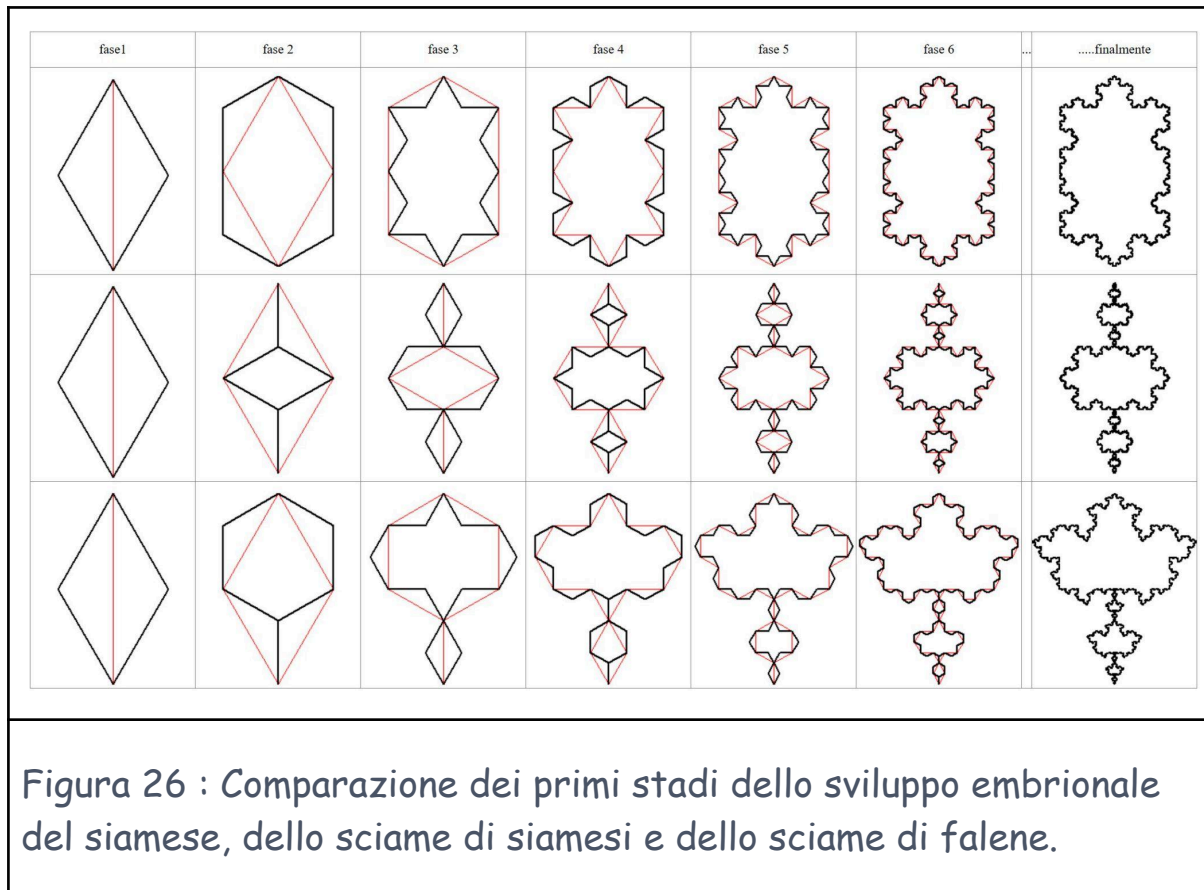
**Far:** «Proprio così. Credo sia giunto il momento di confrontare gli sviluppi embrionali dei nostri due fratelli, tenendo presenti i nostri.»

**Ter:** «Magnifico! Siamo tutti varianti dello stesso embrione? Sono molto curioso di capire analogie e differenze.»

**Far:** «Ecco, allora, gli sviluppi embrionali illustrati in Figura 26. Ti consiglio di provare, per ognuno, a costruirti le stringhe dei due caratteri per riassumere le informazioni facilitando le riflessioni sulle differenze tra i vari casi. Credo che stringhe che codificano le informazioni sulla crescita, non



siano meno importanti di quanto sia il DNA nel mondo della biologia.»



**Ter:** «Allora, cominciamo dal siamese. Nella seconda fase partendo come al solito dal basso a sinistra, abbiamo "++++", l'area aumenta e il poligono diventa un esagono regolare allungato. Per noi due, già nella seconda fase, c'era alternanza di segni, qui no. Nella terza fase invece si ha "-----". Questa volta tutte e otto le trasformazioni fanno diminuire l'area! Andando avanti, mi pare chiaro che in ogni fase, alternativamente, i segni sono sempre concordili!»

**Far:** «Bravissimo. Guarda ora il successivo, la generazione dello sciame di siamesi.»

**Ter:** «-dopo breve riflessione - Esattamente come prima tranne che i segni si scambiano. Il più diventa meno e viceversa. Incredibile, è tutto opposto!»

**Far:** «Questa cosa ha colpito anche me. Non me l'aspettavo proprio. Mi sono posta delle domande. »

**Ter:** «Credo di capire, anche nella mia testa affiorano congetture che potrebbero essere vere o false ma che stimolano enormemente la mia curiosità!»

**Far:** «Vediamo se pensi quel che ho pensato io.»

**Ter:** «Se invertire i segni al DNA del siamese trasforma il siamese in uno sciame di siamesi, perché la stessa operazione non dovrebbe trasformare una farfalla in uno sciame di farfalle e un drago in uno sciame di draghi?»

**Far:** «Anch'io mi posi questa domanda. Vedo che anche in te sta nascendo quello che il Prof chiama uno spirito scientifico! »

**Ter:** «Spirito scientifico? »

**Far:** «Sì, quando la verità delle cose viene decisa spassionatamente alla fine di accurate ricerche sperimentali, non prima.»

**Ter:** «Il problema è che non sempre si sa come sperimentare.»

**Far:** «In questi casi si fa filosofia, si argomenta accuratamente la propria tesi, ma si lascia la questione in sospeso senza pretendere di sapere quel che non si sa.

Quanto alla tua questione, la posi al Prof che mi rispose che la teoria era interessante e convincente ma non sempre confermata da ciò che accade realmente.

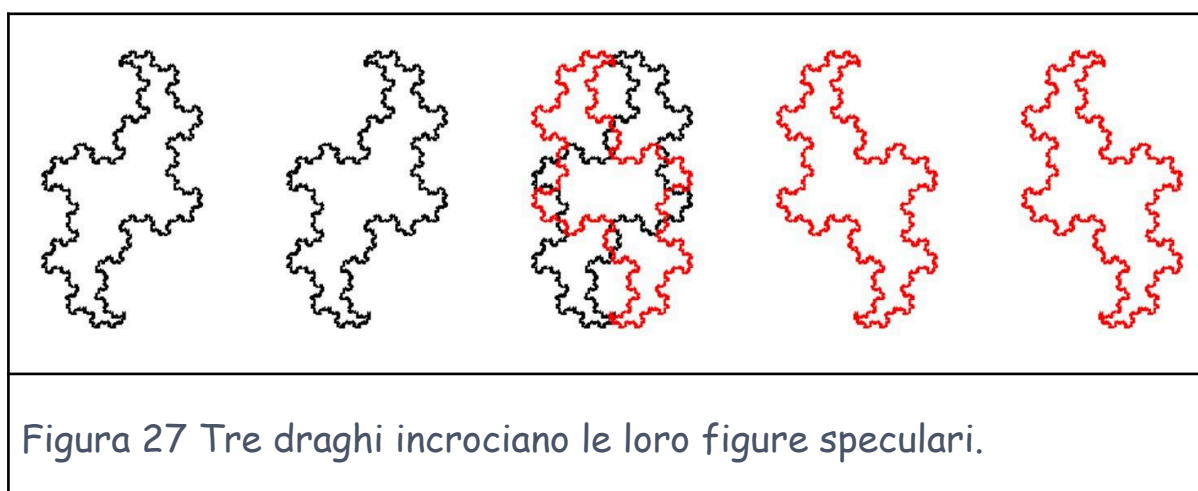
Però mi fece i complimenti, che ora giro anche a te!»

**Ter:** «Allora sono molto curioso di sapere quale creatura corrisponde al nostro DNA invertito nei segni.»

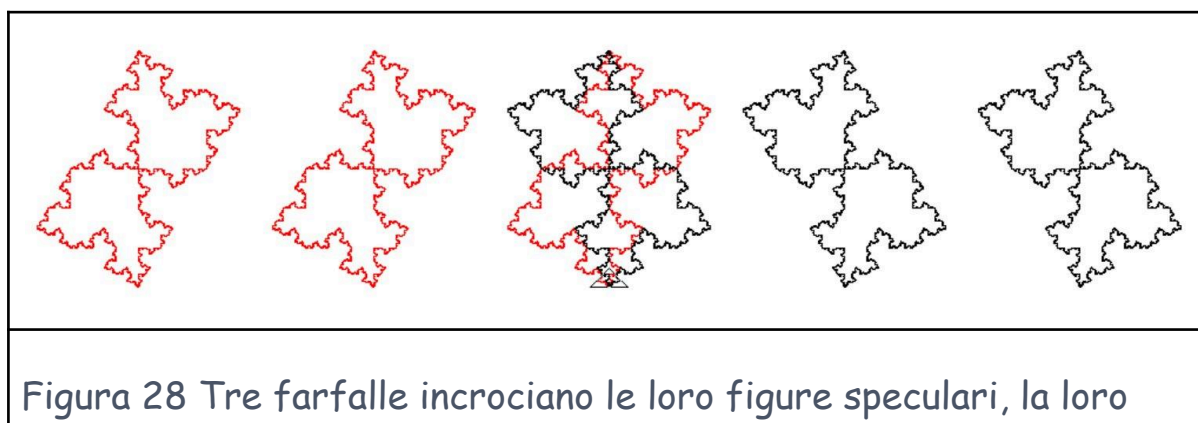
**Far:** «Mi sembra di ricordare che il DNA opposto al nostro corrisponda alle nostre figure speculari!»



**Ter:** «Dunque esiste anche il mio simmetrico, non solo il tuo. Finora non ne ho mai incontrato uno. Oppure l'ho incontrato senza far caso alla differenza. In futuro sarò più attento.»



**Far:** «Ho chiesto conferma alle tartarughe del Tartapelago, con cui sono spesso in contatto telepatico grazie al Prof. Presto ci invieranno la tavola genetica relativa al DNA opposto al nostro. Intanto hanno inviato la Figura 27 e la Figura 28 che chiariscono i nostri rapporti con le nostre immagini speculari.»



intersezione è spettacolare!

**Ter:** «L'incontro scontro tra draghi speculari non è di facile interpretazione ma il tuo è spettacolare, vedo il formarsi di sciame di falene!»

**Far:** «Ebbene sì, è una mia inimitabile peculiarità!»

**Ter:** «Vivi complimenti, sorellina!. Non vedo l'ora che arrivi la tabella promessa dalle tartarughe. Intanto continuo con lo sciame di falene della Figura 24.

Allora, "-+-", "+-+---+", "-+-+---+---+",  
"+-+---+---+---+---+---+",...»

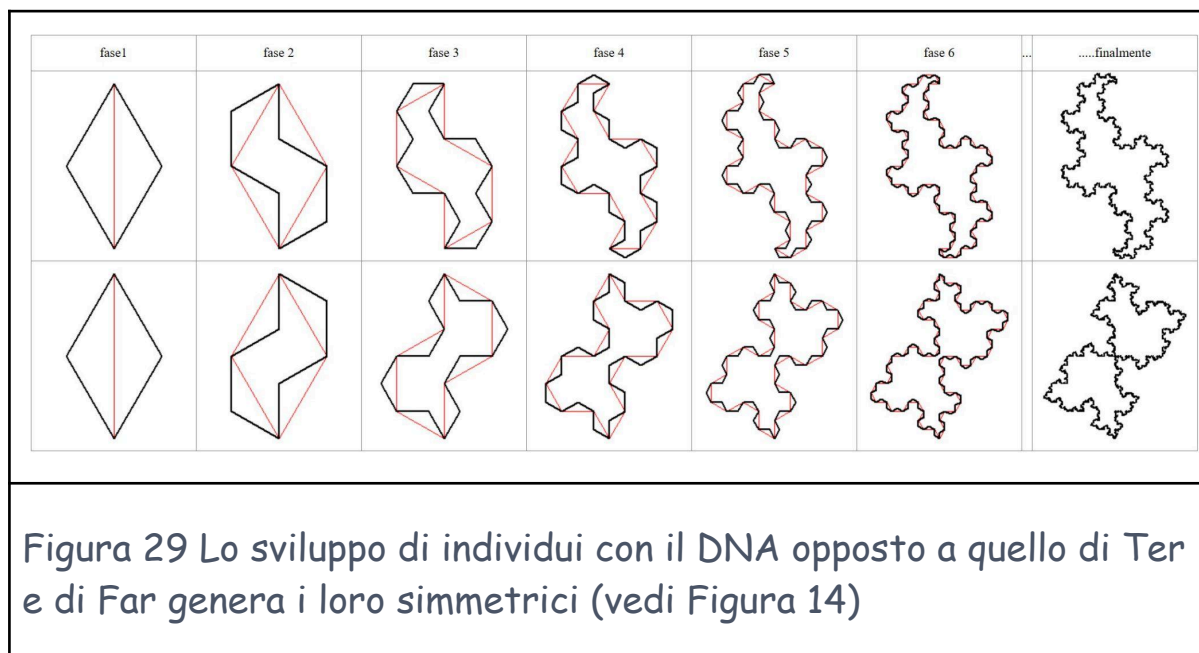
**Far:** «Sì, è corretto. Cosa te ne sembra?»

**Ter:** «È simile al tuo DNA, c'è la stessa alternanza di segno all'inizio di ogni nuova fase ma c'è un raddoppiamento centrale che cambia le cose.»

**Far:** «Infatti, è come se la seconda parte di ogni stringa del mio DNA fosse stata ribaltata. Corrisponde al ribaltamento del mio semiperimetro destro che mi trasforma in uno sciame di falene!»

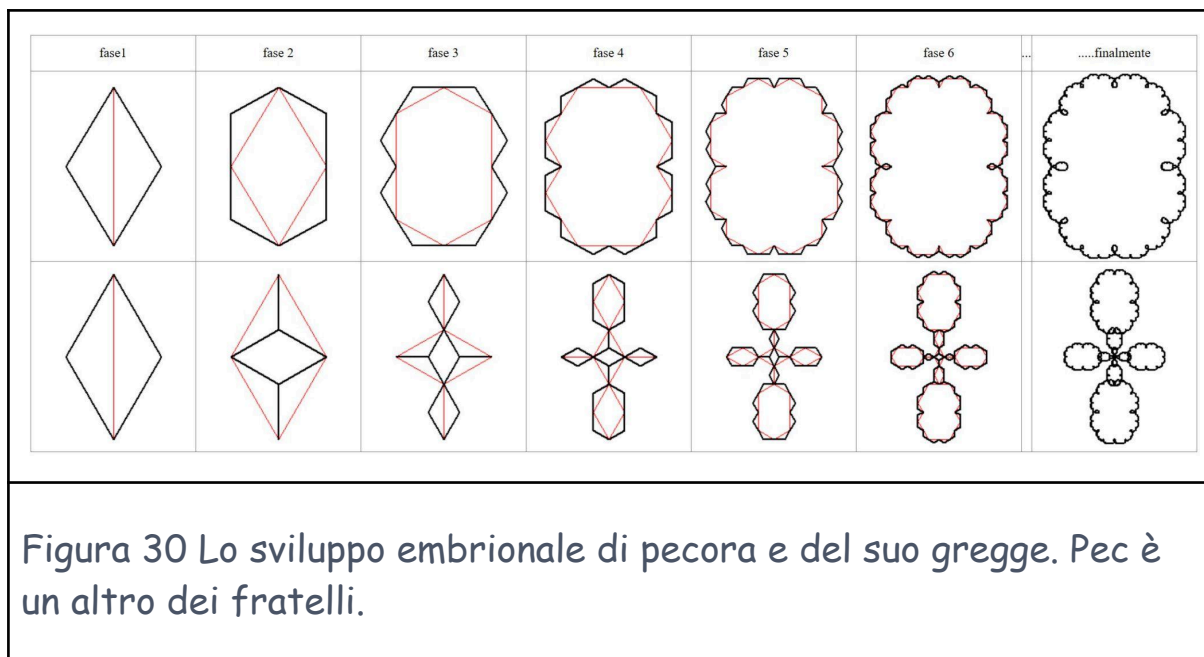
**Ter:** «È sempre sorprendente l'effetto di piccole variazioni del codice genetico!»

**Far:** «Ecco è arrivata la tabella genetica dei nostri opposti DNA, Figura 29.»



**Ter:** «Nessuno sciame di draghi, pazienza. Tutto chiarissimo comunque.»

**Far:** «È arrivata anche una tavola (Figura 30) relativa a mia sorella Pec, la pecora, e al suo gregge . Le due figure derivano entrambe dal nostro embrione comune, il rombo siamese.»



**Ter:** «Mai visti in circolazione.»

**Far:** «Neanche me avevi mai visto!»

**Ter:** «Hanno proprietà eccezionali anche loro?»

**Far:** «Non mi risulta, ma forse non sono ancora stati studiati abbastanza.»

**Ter:** «Molto particolare il DNA della pecora è fatto solo di più! Si vede chiaramente dalla figura che l'area cresce sempre in tutte le trasformazioni e in tutte le fasi!»

**Far:** «Sì, all'infinito converge alla figura della pecora.»

**Ter:** «Me se cresce all'infinito, invece di rimanere costante come la nostra, come mai non supera ogni limite.»

**Far:** «Sembra strano ma è quel che succede sempre con le progressioni geometriche decrescenti. Per esempio quando si scrive zero virgola tre periodico, si intende una somma di infiniti termini positivi che converge a un terzo.»

**Ter:** «Gregge invece mi confonde un po'.»

**Far:** «Sì confonde anche me, credo che sia un DNA fatto di tutti meno ma è faticoso da seguire perché l'area spesso sembra oltrepassare il suo stesso limite...»

## 12. Crisi di identità

**Ter:** «Ho imparato molte cose, grazie a te. Molte altre spero di impararle in futuro. Da una parte ciò mi rende felice, ma dall'altra mi sento in crisi di identità. Comincio a dubitare di essere un drago. I miei fratelli hanno le forme più strane, che tu sappia, c'è almeno un drago tra di loro?»

**Far:** «Sì, l'ho scoperto da poco, è HH.»

**Ter:** «Mi fa piacere! HH, lo conosco bene, frequenta il mio stesso circolo di draghi!»

**Far:** «Lo so, prima di venire da te l'ho incontrato e gli ho promesso che avrei studiato il suo caso.»

**Ter:** «Il suo caso?»

**Far:** «HH ha intuito che tu e lui siete parenti stretti ma non sa come ciò possa essere.»

**Ter:** «Anche io ho avuto questa vaga impressione!»

**Far:** «Ebbene ho appena scoperto che tu e HH avete lo stesso DNA.»

**Ter:** «Lo stesso? Mi sembra impossibile, cosa ci differenzia allora?»

**Far:** «Quello che abbiamo chiamato DNA è solo una utile semplificazione didattica. La realtà è sempre più complessa degli schemi escogitati per cercare di ingabbiarla per poterla descrivere.»

**Ter:** «Non capisco...»

**Far:** «Nel caso di HH il misterioso algoritmo feconda il segmento ma il risultato non è il rombo siamese come per noi.»

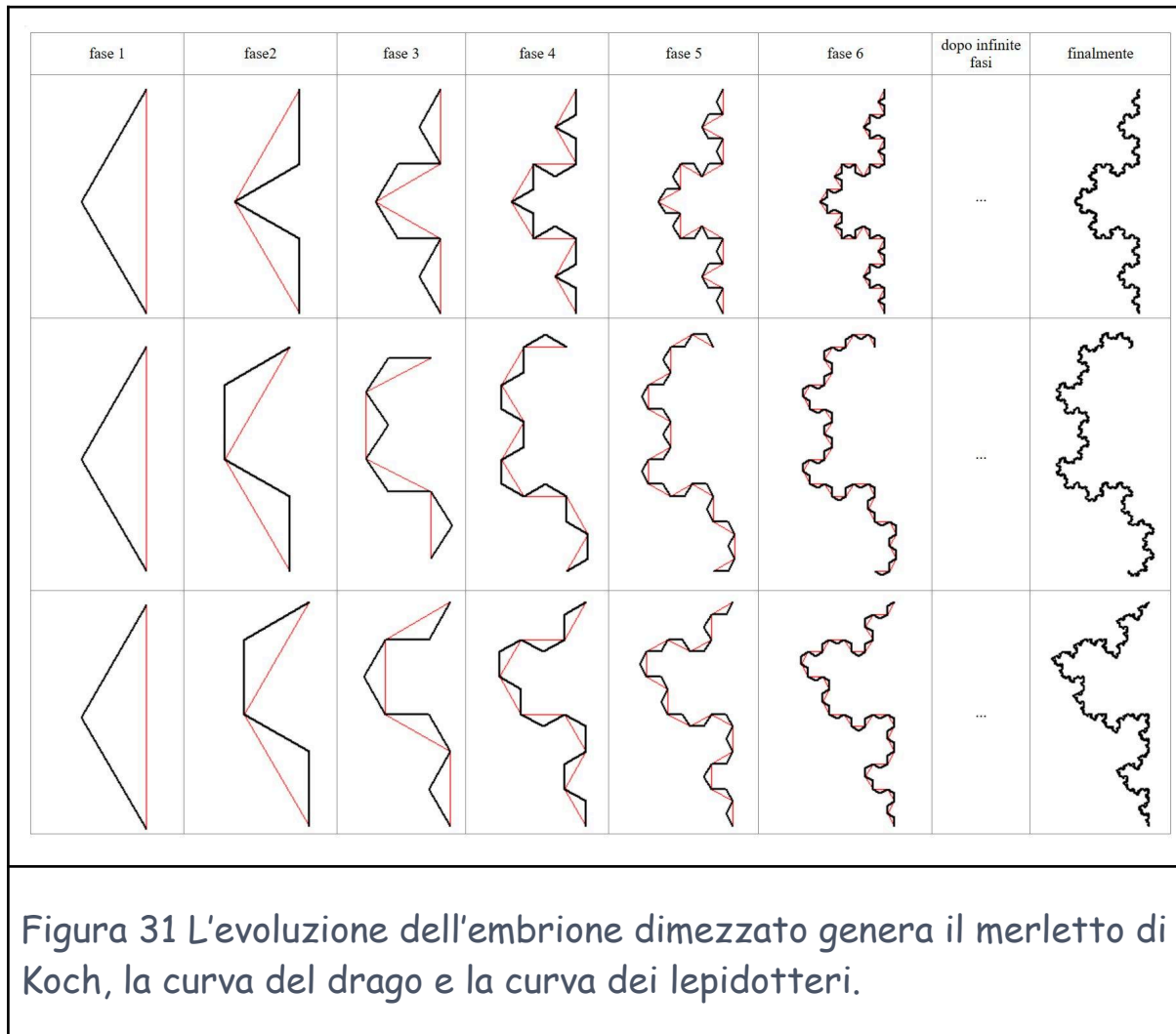
**Ter:** «No? E allora cosa?»

**Far:** «La figura di riferimento nel suo caso è il quadrato. Un quadrato dimezzato nella sua diagonale.»

**Ter:** «Non solo un quadrato invece di un rombo siamese, ma anche dimezzato! Mezzo embrione!»



**Far:** «Sì, ma questo può succedere anche a noi, guarda in Figura 31.»

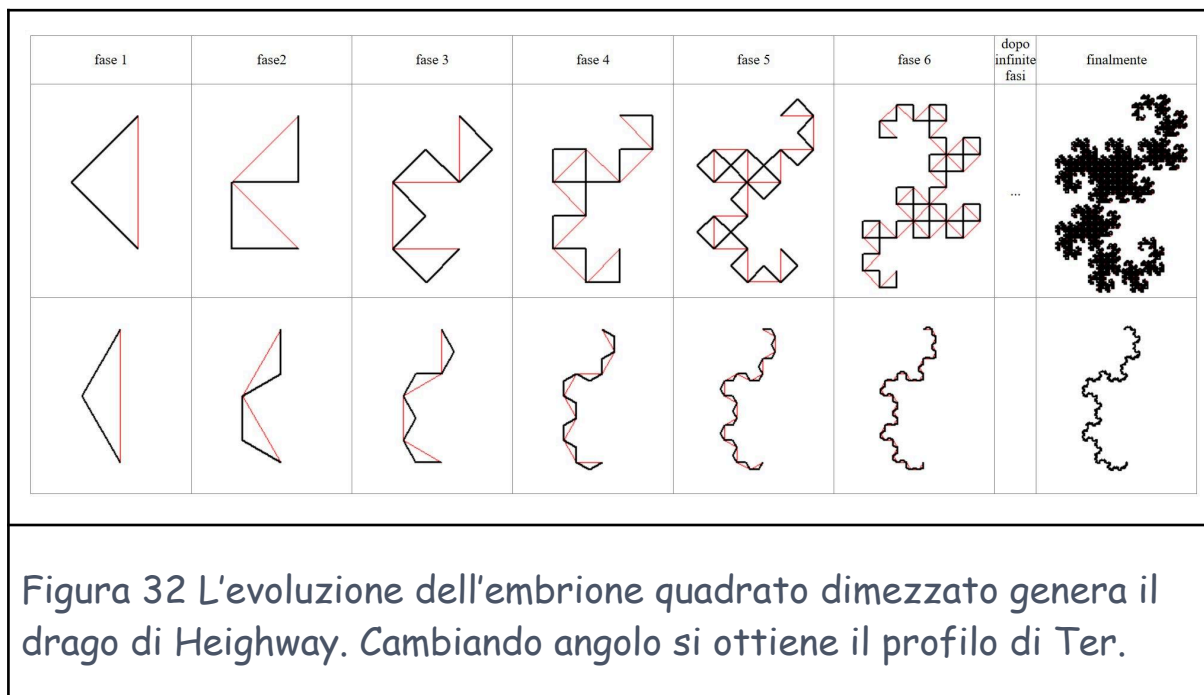


**Ter:** «Così è anche più semplice, si sale e non si scende, si generano i nostri merletti semi-perimetrici che se poi vengono ripetuti a scendere danno il nostro perimetro!»

**Far:** «Sì, potremmo dire che ripetendo il merletto dall'alto verso il basso, cioè a salire e a scendere, in noi si forma la curva chiusa che ci fa da perimetro. »

**Ter:** «E HH? »

**Far:** «Ecco in Figura 32 il suo sviluppo embrionale.»



**Ter:** «Che sorpresa! Mi aspettavo, un merletto per l'angolo di 90 gradi, come avviene per il nostro angolo di 120 gradi!»

**Far:** «Invece il drago di Heighway emerge direttamente dalle linee aggrovigliate sempre più!»

**Ter:** «Salendo lungo le spezzate rosse in ogni fase, mettendo più quando la sostituzione è a sinistra, risulta in ambo i casi: +,+-,+--+,-+--+--+,...»

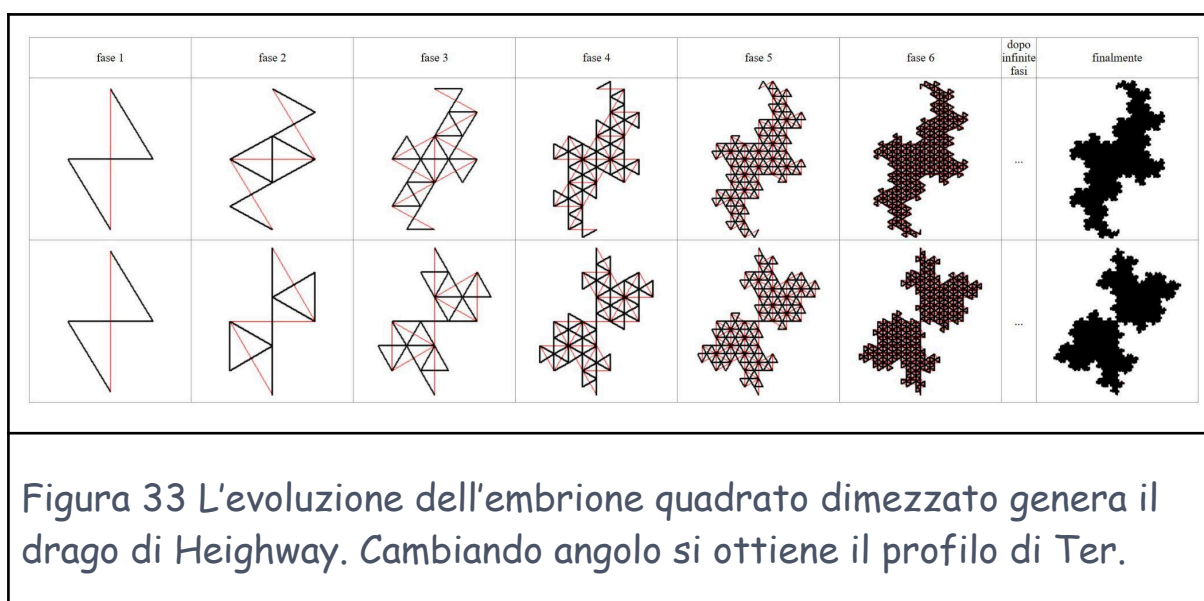
**Far:** «C'è una notevole affinità genetica anche se, inaspettatamente, si riferisce a solo a una parte di te, il tuo profilo.»

**Ter:** «Incredibile questo modo di emergere come area invece che come curva perimetrica.»

**Far:** «Anche noi possiamo svilupparci come area, ti avevo detto che abbiamo molti modi per nascere!»

**Ter:** «Sono proprio curioso di sapere come!»

**Far:** «Allora guarda Figura 33.»



**Ter:** «Magnifico, ancora il nostro embrione dimezzato!»

**Far:** «Dimezzato? E' vero! Dimezzato a mo' di farfalla! Il quarto superiore destro e quello inferiore sinistro.»

**Ter:** «E il viceversa darà i nostri simmetrici.»

**Far:** «Certamente, basta guardare la tavola in uno specchio per rendersene conto. Hai notato che nella figure ci sei tu ma non io?»

**Ter:** «No... È vero! Potrebbe essere tua madre però!»

**Far:** «O anche mia figlia.»

**Ter:** «Molto interessante, ogni nuova scoperta mi fa desiderare di saperne di più. Molte sono le domande che mi pongo. Una di queste ti riguarda.»

**Far:** «Dimmi »

**Ter:** «Se al mio profilo di drago corrisponde un altro magnifico drago, al tuo profilo di farfalla potrebbe corrispondere un'altra magnifica farfalla... o no?»

**Far:** «La tua ipotesi suona bene, forse troppo bene. Siamo creature complesse immerse in un mare di possibilità spesso caotiche e imprevedibili o almeno difficilmente prevedibili.»

**Ter:** «Sono curioso di sapere qual'è il tuo corrispondente al mio drago di Heighway.»

**Far:** «Dovremmo imparare il linguaggio Logo per comandare le tartarughe e rispondere autonomamente a domande di questo tipo. Dovremmo organizzare qualcosa per insegnarlo qui a Fratlandia.»

**Ter:** «Mi piacerebbe.»

**Far:** «Intanto proverò a contattare il Prof per avere le risposte dalle tartarughe del Tartapelago.»

**Ter:** «Hai poteri eccezionali!»

**Far:** «Ai protagonisti delle favole spesso è concesso! Ma ora lasciami concentrare.»

**Ter:** «OK.»

### 13. La rivelazione

**Far:** « Un essere di un altro mondo!»

**Ter:** «Cosa?»

**Far:** « Fantastico, stupendo, inimmaginabile!»

**Ter:** «Calmati, calmati, cosa hai saputo?»

**Far:** «Scusa Ter, sono emozionata, sorpresa e ...felice. Lasciami qualche istante e ti spiegherò.»

**Ter:** «Dimmi, Il DNA del tuo profilo quando l'angolo dell'embrione è retto è quella magnifica farfalla che ipotizzavo?»

**Far:** «Sì, ma a prima vista non si direbbe proprio, non è una star della geometria frattale. Eppure è una figura ben conosciuta. Conosciutissima nel mondo degli umani. Anche noi ne avevamo già parlato.»

**Ter:** «Come è possibile. »

**Far:** «È che non è un frattale; è un magnifico mezzo quadrato della geometria ordinaria, un triangolo rettangolo isoscele!»

**Ter:** «Mi sembra impossibile e poi ... non sarebbe una figura straordinaria, come noi!»

**Far:** «La geometria frattale, come la natura del mondo degli umani, nonostante gli sforzi razionali preziosi per riuscire a capirla, finisce sempre per sorprendere!»

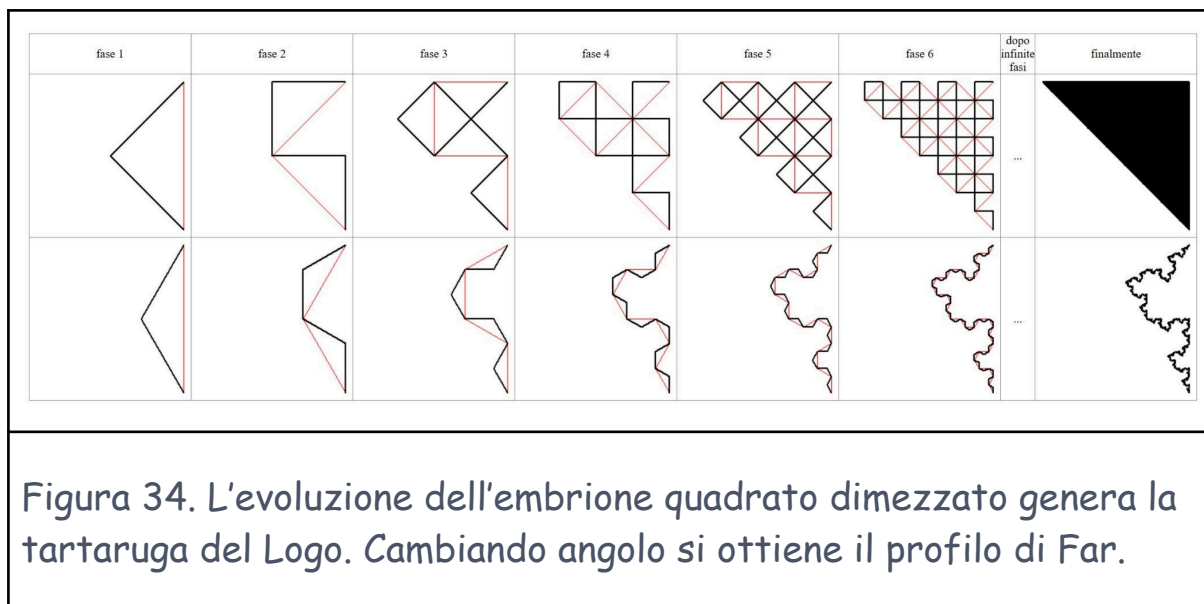
**Ter:** «Dov'è la farfalla nel mezzo quadrato?»

**Far:** «Puoi considerare l'altezza relativa al maggior lato e vedrai due ali che riproducono in miniatura la farfalla stessa! Si tratta di un replicante del secondo ordine esattamente come HH.»

**Ter:** «Esattamente come tu e io. Se fosse una proporzione sarebbe: Mezzo quadrato sta a HH come Far sta a Ter. Mezzo e Far alternati io e HH continui. Semplicemente meraviglioso! Ti hanno mandato la tavola dello sviluppo embrionale? Vorrei la conferma a quel che mi pare di aver già capito»

**Far:** «Sì, guarda Figura 34 corrispondente alla tua Figura 32.»





**Ter:** «Inoppugnabile! La stessa forma delle tartarughe del Logo? Allora quelle tartarughe sono tue e anche mie sorelle?»

**Far:** «Sì, sono commossa perché mi hanno riconosciuta come sorella e mi hanno invitato nel loro Tartapelago per imparare il Logo, lingua necessaria per parlare con loro e rispondere alle nostre congetture senza dipendere dal Prof.»

**Ter:** «Sì, ma cosa c'entri tu che sei una straordinaria figura frattale con la geometria ordinaria? »

**Far:** «Non so se l'hai notato ma io sono contenuta perfettamente in un rettangolo che ha il doppio della mia area. L'affinità genetica è evidente, con il senno di poi!»

**Ter:** «Ma tu sei ternaria, come me.»

**Far:** «Anche il rettangolo che mi contiene lo è avendo come rapporto tra i lati radice di tre.»

**Ter:** «Magnifico, congratulazioni!»

**Far:** «Grazie, caro fratellino. Ho accettato l'invito, intendo partire subito per il Tartapelago.»

**Ter:** «Non sarà troppo difficile imparare il Logo.»

**Far:** «No, quello delle tartarughe è un linguaggio pensato per favorire l'apprendimento, anche quello dei bambini.»

**Ter:** «Seguirai un corso?»

**Far:** «Non esattamente; il Logo secondo la filosofia educativa del suo ideatore si impara facendo, cioè costruendolo!»

**Ter:** «Filosofia educativa?»

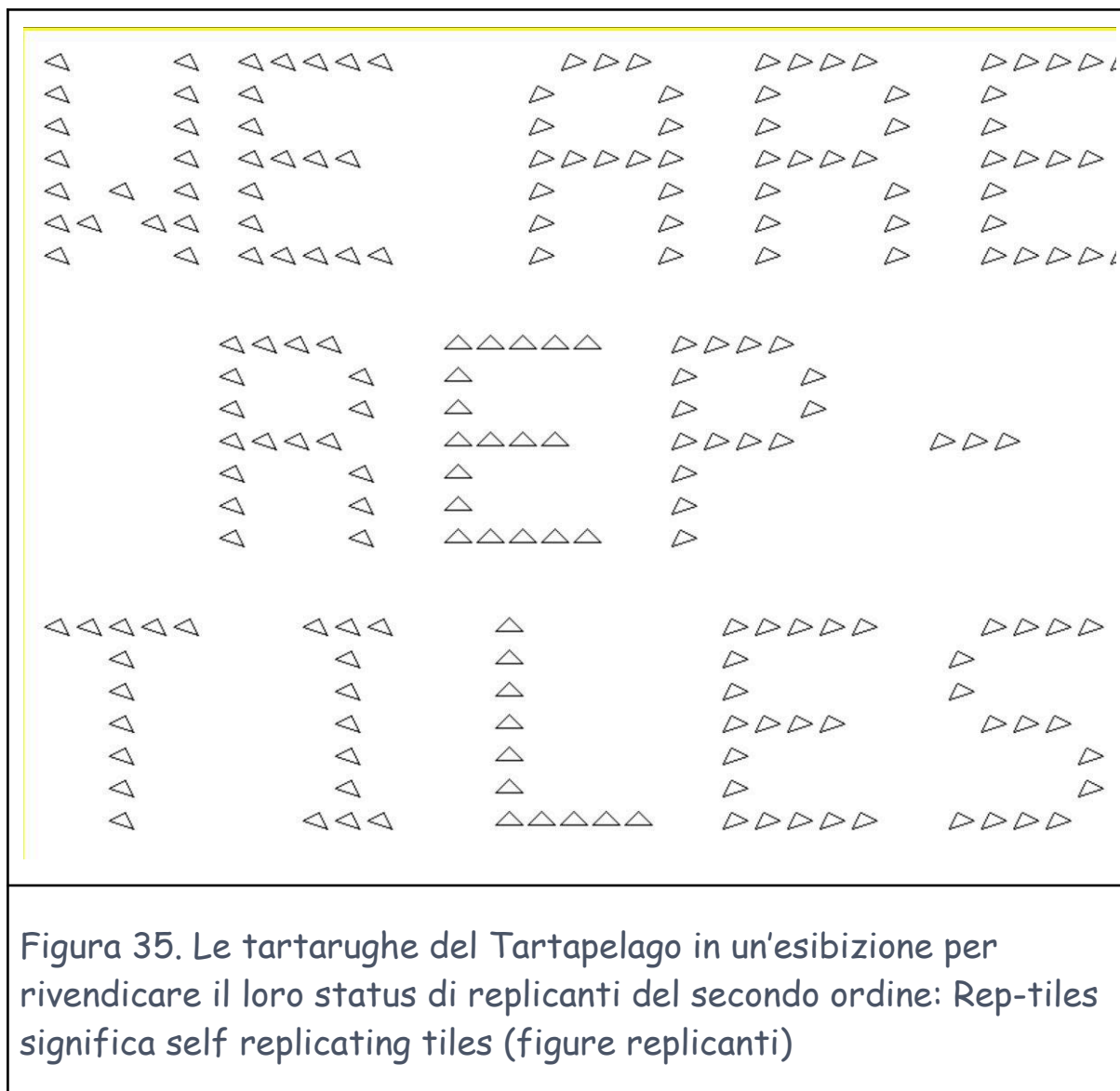
**Far:** «Sì, se vuoi fartene un'idea le Tartarughe recitano spesso un testo tratto dal Mindstorms di Papert. Lo trovi alla url

<http://www.maecla.it/tartapelago/tartateatro/index.htm>»

**Ter:** «Andrò a vedere, poi, se sei d'accordo, andrò da HH gli porterò i tuoi saluti, gli riferirò quel che sappiamo sulla nostra affinità genetica e gli proporrò di fare insieme qualcosa per diffondere il Logo.»

**Far:** «Benissimo, fratellino, a presto. Sarà una rivoluzione. Una rivoluzione culturale!»

**Fine**



## 14. Note

Tutte le figure di questo racconto sono state realizzate dall'autore con FMSLogo una versione del Logo che si può scaricare gratis alla url

<https://fmslogo.sourceforge.io/>

cliccando poi su "download FMSLogo".

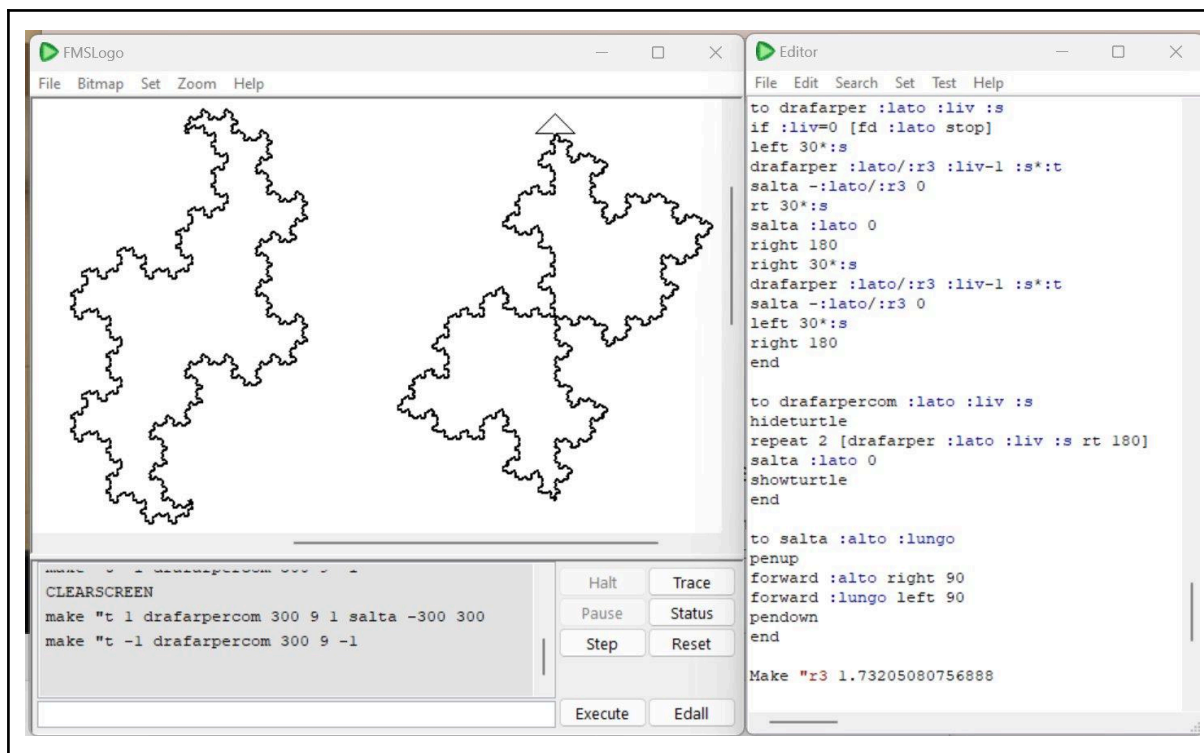


Figura 36. Nella finestra schermo del FMSLogo sono state disegnate un drago e una farfalla. I comandi impartiti alle tartarughe sono rimasti memorizzati nell'apposito spazio sottostante, lo spazio per i disegni, sopra alla linea dei comandi dove questi sono stati immessi prima di essere memorizzati. I comandi fanno riferimento al programma memorizzato nella finestra Editor, a destra.

In Figura 36 è visibile la finestra principale con il pulsante "Execute" per mandare in esecuzione gli ordini per la tartaruga scritti nell'apposita linea dei comandi alla sinistra del pulsante. Appena sopra c'è un campo di testo dove rimane traccia delle immissioni. Superiormente c'è il campo grafico dove la tartaruga,

rappresentata dal classico triangolino, esegue gli ordini impartiti. Nella figura l'automa ha appena realizzato un drago e una farfalla. Le pochissime primitive necessarie per iniziare sono spiegate nel vocabolario animato del Tartapelago alla url <http://www.pietrocola.eu/maecia/tartapelago/vocanimato/index.htm> Se volete copiare le procedure per realizzare le figure mostrate nel racconto potete immettere la url: [www.pietrocola.eu/fratlandia.txt](http://www.pietrocola.eu/fratlandia.txt), e poi copiare e incollare il testo nella memoria della tartaruga, accessibile premendo il tasto "Edall" che apre la finestra "Editor" visibile in figura. Dopo aver salvato il testo copiato mediante il menù "file" la tartaruga, a comando, eseguirà i vari disegni nelle dimensioni specificate. Tutto dovrebbe essere agevole ma se avete problemi non esitate a contattarmi.

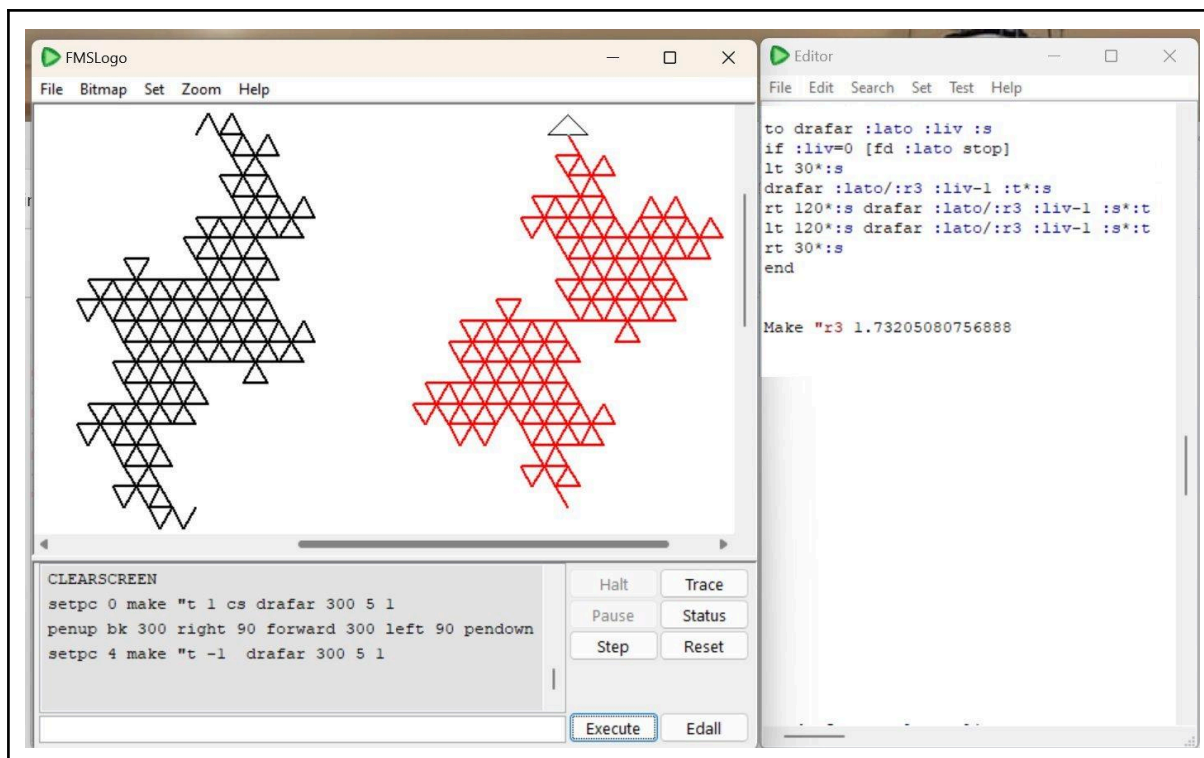


Figura 37. Nella finestra schermo del FMSLogo sono state disegnate un drago e una farfalla. I comandi impartiti alle tartarughe sono rimasti memorizzati nell'apposito spazio sottostante, lo spazio per i disegni, sopra alla linea dei comandi dove questi sono stati immessi prima di essere memorizzati. I comandi fanno riferimento al programma memorizzato nella finestra Editor, a destra.