

Dalla progressione geometrica alla spirale proporzionale costruita con la tartaruga del Logo

Giorgio Pietrocola

26 ottobre 2022

1 Spirale proporzionale

Benché il nome spirale logaritmica sia di gran lunga il più diffuso, questa mirabile spirale, modello per molte forme biologiche, a volte è chiamata con nomi che meglio la caratterizzano come spirale della crescita o spirale proporzionale. Una crescita proporzionale è una crescita che misurata a intervalli regolari genera una progressione geometrica, cioè una successione di numeri crescenti che mantiene costante il risultato della divisione tra termini consecutivi. Questo rapporto invariante è detto ragione della progressione o anche fattore di accrescimento. Ciò porta nei termini che via via si succedono un accumulo graduale di tali fattori che conviene esprimere sotto forma di potenza ($c, cr, crr, crrr, cr^4 \dots$). Per questo motivo una crescita proporzionale è detta anche crescita esponenziale. La distanza dei punti della spirale dall'asintotico centro, detto polo, cresce in modo proporzionale. Ciò si esprime in coordinate polari con un'equazione esponenziale che ha per grafico la spirale stessa. Ma se ciò che meglio caratterizza questa curva è la crescita esponenziale perchè è universalmente conosciuta come spirale logaritmica? Non ho trovato e non ho una risposta convincente a questa domanda. Sono convinto che la risposta vada ricercata in particolari contingenze storiche e non in meriti oggettivi del termine affermatosi. Il logaritmo è l'operazione inversa dell'esponenziale. Una crescita logaritmica è dunque, al contrario, molto lenta. Per questo una crescita molto rapida viene spesso rallentata rappresentandola in scala logaritmica per poterla così visualizzare, sia pur deformata, in uno spazio ridotto. Se in una progressione geometrica invece di dividere due termini consecutivi li sottraiamo, come è facile dimostrare, otteniamo un'altra progressione geometrica con lo stesso fattore di crescita. Se si considerano i logaritmi



Figura 1: Basilea Lapide di Jacob Bernoulli (fonte:wikimedia commons autore:Wladyslaw Sojka)

dei vari termini in progressione geometrica si ottiene una nuova progressione che ha la differenza dei termini consecutivi costante ossia una progressione aritmetica. In una spirale proporzionale, secondo il fattore di accrescimento, le spire si distanziano tra loro sempre più. Deformando la spirale secondo una scala logaritmica invece le spire risultano equidistanziate proprio come le spire scolpite da quell'artigiano di Basilea del diciottesimo secolo che fu incaricato di esaudire il desiderio del matematico Jacob Bernoulli di avere sulla sua tomba quella "spira mirabilis" che tanto aveva studiato e che lo aveva meravigliato per la caratteristica di risorgere identica dopo vari mutamenti.

2 Due spirali

Le due spirali viste, rappresentate in coordinate polari, corrispondono la prima ad una funzione esponenziale ($\rho(\theta) = ae^{b\theta}$), la seconda ad un polinomio di primo grado ($\rho(\theta) = k + b\theta$). Considerando una qualsiasi successione di angoli in progressione aritmetica ($0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha, \dots$) tramite le due funzioni si ottengono due diverse successioni riportate in tabella:

θ	$ae^{b\theta}$	$k + b\theta$
0	a	k
α	$ae^{b\alpha}$	$k + b\alpha$
2α	$ae^{2b\alpha}$	$k + 2b\alpha$
3α	$ae^{3b\alpha}$	$k + 3b\alpha$
$\dots$	$\dots$	$\dots$

Nel caso della spirale proporzionale si ha una progressione geometrica con comune quoziente (o ragione) $e^{b\alpha}$. Nel caso della spirale archimedeica si ha una progressione aritmetica con comune differenza (o ragione) $b\alpha$.

3 Questioni didattiche

Credo che, sia a livello scolastico che divulgativo, un primo approccio alla conoscenza di questa spirale possa essere proposto con successo anche a chi non conosce ancora la funzione esponenziale e la sua inversa. Deve invece essere ben radicato il concetto di crescita proporzionale. Le popolazioni delle varie specie, finché possono disporre di un ambiente ospitale, crescono in questo modo. Così, per un certo periodo, è per i singoli individui, noi compresi. Anche importanti entità inanimate come il capitale, quando gli interessi producono a loro volta interessi, crescono in modo proporzionale. E' questo un concetto pieno di agganci con la vita quotidiana di cui tutti, più o meno consapevolmente, abbiamo esperienza.

Nel mondo dei numeri questo tipo di crescita è descritta da progressioni geometriche come questa:

$$50, 100, 200, 400$$

che ha 2 per fattore di accrescimento. A differenza del nostro mondo fisico e biologico dove tutto, prima o poi, finisce, nel mondo dei numeri dove il tempo non esiste e gli enti che lo popolano non sono sottoposti alle ingiurie del tempo, le sequenze limitate possono prolungarsi all'infinito in entrambi i versi. Per esempio la precedente progressione può diventare:

$$\dots 25, 50, 100, 200, 400, 800 \dots$$

Possiamo ottenere nuovi termini moltiplicando o dividendo, secondo il verso, il termine prossimo per la ragione della progressione geometrica che nel nostro esempio è 2.

4 Crescita adeguata

Per collegare la crescita proporzionale con la spirale logaritmica si può ricorrere a un'immagine mentale collegata a un oggetto comune della vita quotidiana come la lancetta di un orologio. La lancetta dei minuti, ogni secondo avanza di un sessantesimo di giro finché in un minuto fa un giro completo per poi proseguire allo stesso modo nei giri successivi. Risulta piuttosto evidente che la sua punta percorre una circonferenza avente per raggio la lunghezza della lancetta. Il moto a scatti approssima bene nel discreto quello che nel continuo è un moto circolare uniforme. Se ora immaginiamo una lancetta che mentre gira cresce proporzionalmente al trascorrere del tempo, cosa cambia? E' evidente che la curva disegnata dalla punta non si chiuderà più in un cerchio ma darà spire corrispondenti ad ogni giro che si allontaneranno dal centro di rotazione e tra di loro sempre più, seguendo la crescita proporzionale della lancetta rotante. Questo rapporto costante, misurato dopo ogni giro, è a sua volta ragione di una progressione geometrica ed è detto fattore di accrescimento della spirale. Esso differenzia in modo semplice e naturale le spirali di questo tipo. Se si indica con q il fattore di accrescimento $i = q - 1$ è il tasso di incremento per giro. Nel mondo della geometria una spirale proporzionale, come anche la retta, è senza inizio e senza fine. Allontanandosi dal centro si hanno distanze tra spire sempre più grandi avvicinandosi invece le distanze si fanno sempre più piccole ma mai nulle in un avvolgimento senza fine intorno all'asintotico punto centrale.

5 Crescita inadeguata

La crescita proporzionale o esponenziale è una crescita molto rapida che troviamo spesso in natura. Tuttavia non tutte le crescite naturali molto rapide sono di questo tipo. Per esempio lo spazio percorso da un oggetto in caduta libera cresce velocemente al trascorrere del tempo ma non in modo proporzionale. Infatti notoriamente l'equazione che descrive un moto uniformemente accelerato non è un'equazione esponenziale ma un polinomio di secondo grado. Ciò falsifica una definizione cinematica come questa: *"La spirale logaritmica è la traiettoria di un punto che si muove di moto uniformemente accelerato su una semiretta, la quale ruota uniformemente intorno alla sua origine."*. Purtroppo questa definizione fuorviante è presente in numerosissimi siti web italiani anche apparentemente attendibili [4] e anche in qualche pubblicazione cartacea autorevole [5].

6 Un grafico esplicativo

Un grafico che utilizza un tratto di spirale logaritmica caratterizzata da un fattore di accrescimento 2 pari ad un tasso di incremento del 100% aiuterà a comprendere meglio la natura di questa curva e darà anche suggerimenti per la sua costruzione. Come si può vedere nel grafico mostrato in figura 3, dal centro della spirale partono dodici semirette che dividono l'angolo giro in altrettante parti uguali ripartendo il piano in angoli di 30 gradi. Ogni semiretta interseca più volte il tratto di spirale avvolgente rappresentata individuando punti corrispondenti a una stessa nota ma di altezza crescente. Nel grafico la distanza relativa ad ogni punto intersecato dal centro della spirale rappresenta la frequenza. Sia il punto iniziale più vicino al centro che quello finale più lontano, separati da 6 ottave, così come tutti i punti della loro semiretta, corrispondono al do. Su una stessa semiretta si individua sempre la stessa nota ma dopo il primo punto, ogni volta il valore precedente raddoppia passando all'ottava superiore secondo la terminologia adottata dai musicisti. Anche la distanza tra una spira e l'altra raddoppia ogni giro. Come la capacità ricettiva del nostro apparato uditivo che può percepire onde sonore solo all'interno di un certo intervallo di frequenze, anche il tratto di spirale logaritmica mostrata è limitato sia superiormente, per escludere valori della frequenza dell'onda troppo alti, che inferiormente, per escludere i troppo bassi. Allontanandosi dal centro lungo il tratto di spirale rappresentata, i raggi, un semitono dopo l'altro, individuano note sempre più alte, aumentando di lunghezza in progressione geometrica. In questo viaggio si passa così dai 65,40639133 Hz del do_2 del raggio minore ai circa 4186 Hz del do_8 del raggio maggiore passando

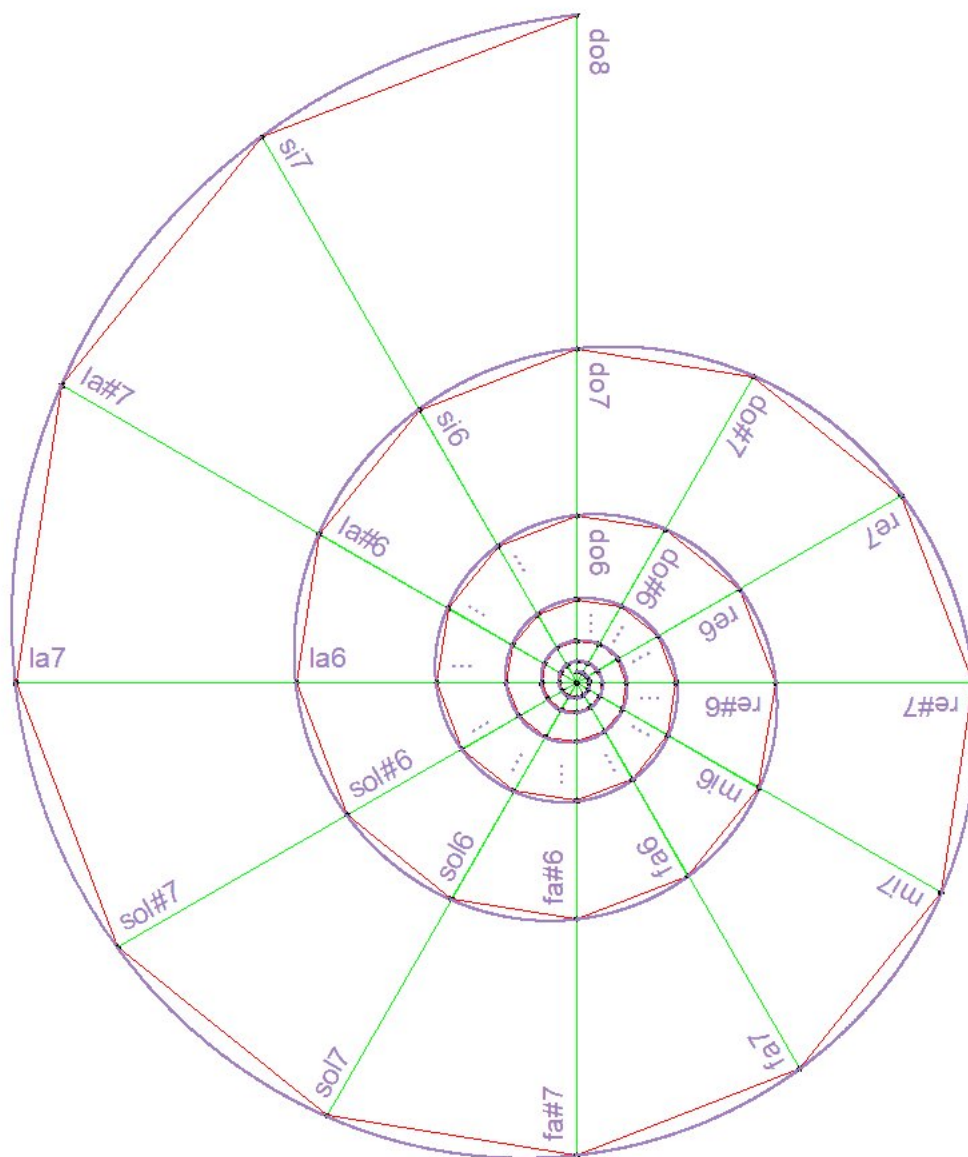


Figura 2: Temperamento equabile, scala: grafico in coordinate polari della variazione della frequenza delle note, da 65 a 4186 Hz

per i 440 Hz del la_4 conformemente alla convenzione internazionale. In questo intervallo, raddoppiando ogni giro, in sei giri, la frequenza della nota, come la lunghezza del raggio che la rappresenta, aumenta esattamente di $2^6 = 64$ volte.

7 Fattore di accrescimento frazionato

Se invece di considerare il fattore di accrescimento R dopo ogni giro lo consideriamo dopo ogni ennesimo ($\frac{1}{n}$) di giro, come diventa? Il nuovo fattore r dovrà essere moltiplicato per se stesso n volte per avere R . Dunque la risposta è nell'equazione $R^n = q$ cioè $r = R^{\frac{1}{n}}$. Nel nostro caso in cui $R = 2$ ed $n = 12$ si ha $r = 2^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{2} = 1,059463094...$ il che corrisponde $i = 0,059463094$ indicante un tasso di crescita della frequenza dei semitoni di poco inferiore al 6%

Possiamo, come si fa di solito con le progressioni geometriche, indicare il generico termine della progressione con s_i essendo $s_i = cr^i$ e in particolare il primo termine che nel nostro grafico è $s_0 = c = 65.40639133$ $s_{72} = 4186$ (circa). Indicando con c il raggio più corto la nostra progressione sarà

$$c, cr, cr^2, cr^3, ..., cr^{11}, cr^{12}, cr^{13}, ..., cr^{24}, ..., cr^{36}, ..., cr^{48}, ..., cr^{60}, ..., cr^{72}$$

raddoppiando ogni giro il raggio più lungo è 2^6 volte il più corto. si trova facilmente $r = 2^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{2}$ da cui anche $cr^{12} = 2c$, $cr^{24} = 4c$, $cr^{36} = 8c$, ... L'esponente di r , da 0 fino a 72 ci aiuta a ordinare e contare i semitoni e anche a classificarli. Infatti dividendo l'esponente corrispondente a una particolare nota della scala per 12, troviamo il quoziente intero che, sommato 2, ci indica l'ottava di appartenenza mentre il resto della divisione ci indica il nome della nota: Resto 0 do, resto 2 re, resto 4 mi, resto 5 fa, resto 7 sol, resto 9 la, resto 10 si. La forma del grafico proposto non solo ricorda il guscio di una chiocciola ma, non a caso, si ritrova in una componente del nostro orecchio interno facente parte dell'organo dell'udito: la coclea. Anche se il grafico è solo un tratto della spirale logaritmica, può essere prolungato con ulteriori raggi al ritmo della progressione sia verso l'infinitamente grande che verso l'infinitamente piccolo. Analogamente la progressione geometrica considerata si potrà estendere all'infinito nei due versi opposti:

$$...cr^{-2}, cr^{-1}, c, ..., cr^{72}, cr^{73}, cr^{74}, ...$$

Unendo con un segmento, a due a due, i punti terminali di raggi consecutivi otteniamo una serie di triangoli simili e anche una poligonale [3] (in rosso nel grafico) interpolante la spirale. In virtù della similitudine dei triangoli facilmente dimostrabile anche i segmenti di questa poligonale, che approssima

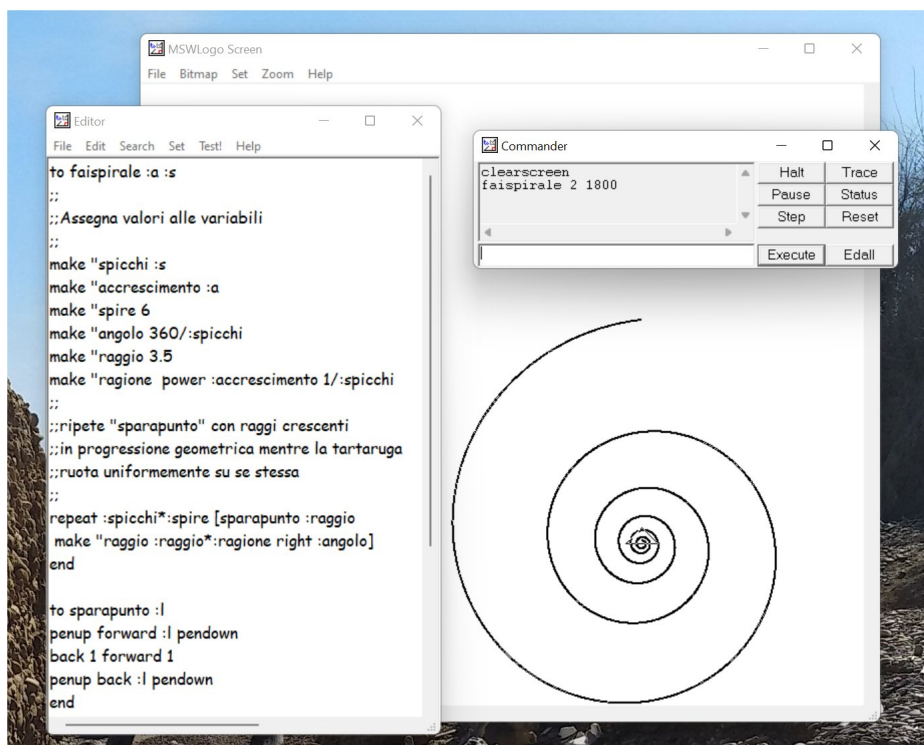


Figura 3: Tre finestre dell'MSWLogo: le poche istruzioni necessarie per generare un tratto di spirale logaritmica con i relativi commenti preceduti da ";" visibili nella finestra "Editor", poi c'è la finestra "Commander" in cui, immettendo "faispirale 2 1800", si ottiene quanto appare nella finestra "Screen". Per i significati dei comandi si può consultare il vocabolario animato del Tartapelago [2]

la spirale, formano una progressione geometrica con ragione $r = 2^{\frac{1}{12}}$. Come si dimostra facilmente, l'angolo di deviazione tra un segmento e il successivo coincide con l'angolo di suddivisione che nel nostro caso è 30 gradi. Per una poligonale che approssimi meglio si deve dividere l'angolo giro in più parti uguali, ad esempio 24, 48, 96 ... ottenendo approssimazioni ogni volta migliori che hanno per limite la spirale logaritmica. La costruzione di una successione di triangoli simili con riga e compasso non presenta difficoltà ma può rivelarsi una procedura troppo lunga. Molto meglio servirsi di programmi informatici che hanno implementata la cosiddetta grafica della tartaruga. Per esempio l'MSWLogo, distribuito gratuitamente dalla Softronix [1], con cui sono state realizzato le figure 2 e 3 di questo articolo.

8 Due algoritmi per la tartaruga

Ecco due semplici algoritmi per costruire la spirale logaritmica. Entrambi dipendono da due parametri, gli stessi, legati tra loro. Un angolo α frazione f dell'angolo giro, e la ragione r della relativa progressione geometrica. Quest'ultima è legata alla frazione scelta e al fattore di accrescimento R della spirale dalla relazione:

$$r = R^f$$

Nel caso dell'esempio musicale

$$\alpha = 30^\circ, f = \frac{1}{12}, R = 2, r = 0,05946 \dots$$

- Algoritmo della tartaruga centrale. Invisibile lancetta crescente. La tartaruga ferma sul polo gira uniformemente su se stessa di una piccola frazione dell'angolo giro e ogni volta traccia un punto alla distanza assegnata che varierà in progressione geometrica. Per far ciò ogni volta avanza senza lasciare traccia e retrocede nello stesso modo dopo aver tracciato il punto. Per esempio se gira di $\frac{1}{10}$ di grado (pari a $\frac{1}{3600}$ di angolo giro), i punti tracciati appariranno sullo schermo come una curva continua. Se si vuole una spirale proporzionale con fattore di accrescimento R la progressione geometrica delle successive distanze dovrà essere $R^{\frac{1}{3600}}$
- Algoritmo della tartaruga periferica. Poligonale interpolante [3]. La tartaruga avanza in progressione geometrica e gira di un angolo costante. Se l'angolo è sufficientemente piccolo (esempio $\frac{1}{10}$ di grado) la ragione della progressione è $R^{\frac{1}{3600}}$ e così anche il tratto iniziale (esempio 0.001 pixel) la spezzata apparirà come una curva.

9 Sull'equazione

Volendo esprimere con un'equazione il grafico delle frequenze delle note viene naturale scrivere:

$$\rho(\theta) = c2^{\frac{\theta}{2\pi}}$$

Infatti così inizialmente abbiamo $\rho(0) = c$ dopo un giro pari a 2π radianti si ha $\rho(2\pi) = 2c$ e dopo 6 giri si ha $\rho(12\pi) = 64c$. Se però confrontiamo questa equazione esponenziale con quella comunemente usata $\rho(\theta) = ae^{b\theta}$ potremmo avere qualche difficoltà nel riconoscerla.

Chi conosce però i logaritmi e le loro proprietà può comprendere facilmente che la nostra equazione può scriversi equivalentemente nella forma

$$\rho(\theta) = ce^{\ln 2 \frac{\theta}{2\pi}} = ce^{\frac{\ln 2}{2\pi} \theta} = ce^{b\theta}$$

e che quindi nei due casi a coincide con c e $b = \frac{\ln 2}{2\pi}$. Tutto ciò si generalizza facilmente a un fattore R di accrescimento qualsiasi.

Come si può vedere quindi il fattore c indica solo il punto dove si inizia a considerare la spirale ma non la sua forma. Questa è invece determinata unicamente dal fattore di accrescimento e quindi dal parametro b .

Riferimenti bibliografici

- [1] [Sito Softtronix](http://www.pietrocola.eu/maecla/tartapelago/vocanimato/index.htm) <http://www.pietrocola.eu/maecla/tartapelago/vocanimato/index.htm>
- [2] [Vocabolario animato del Tartapelago](#), Maecla, 2005
- [3] [Poligoni logaritmiche](#), Maecla 2005
- [4] Alcuni dei tanti siti in cui compare una presunta definizione cinematica di spirale logaritmica:
 - [dm.unife.it](#)
 - [macosa.dima.unige.it](#)
 - [www.1001storia.polimi.it](#)
 - [www.matematicaescuola.it](#), corso laurea Lecce p.9 es.4.3
 - [/webthesis.biblio.polito.it](#), p.44
 - [www.math.it](#)
 - Leo Major, [Spirale logaritmica](#), YouTube, 2020
- [5] Libri in cui compare la stessa definizione fuorviante di spirale logaritmica
 - Renato Betti, Geometria leggera: introduzione all'idea di spazio matematico, Franco Angeli 2015 [2.2 Le curve nel piano](#)
 - Nuova enciclopedia popolare 1849 [Spirale logaritmica](#)
- [6] [Presentazione slide IX MatNat APAV](#)
- [7] [Presentazione Geogebra IX MatNat APAV](#)