Dialogo con la formula che anticipò di un secolo l'era informatica

Giorgio Pietrocola

3 febbraio 2021

Direttore Quando i miei collaboratori mi hanno annunciato una visita fuori dal comune credevo che volessero scherzare invece sono davvero stupito di questa sua presenza qui. Chi è lei e cosa vuole dalla nostra casa editrice?

Formula Buongiorno direttore, come può ben vedere sono una... signora. Una signora formula. Come signora non dovrei rivelare l'età ma non le nascondo di aver fatto il mio tempo. Ormai, così come mi vede, posso essere ricordata esclusivamente per motivi storici. Nei moderni trattati, ma già dalla seconda metà dell'ottocento, nessuno più mi considera.

Direttore Questo mi dispiace ma non vedo cosa potrei fare per lei.

Formula Potrebbe raccontare la mia storia.

Direttore Mi dispiace ma temo che i nostri lettori aborriscano voi formule. Lei forse è un'eccezione, è una formula parlante, le sue colleghe invece stanno lì mute e incomprensibili ai più. E non pochi temono persino di doversele imparare a memoria come "quattro terzi pi greco erre tre".Non vorrà mica che i nostri lettori si sentano minacciati Per questo le formule vengono pubblicate in libri tecnico scientifici dove i lettori sanno perfettamente ciò che troveranno. Le consiglio di rivolgersi ad una casa editrice specializzata in questo specifico settore.

Formula Veramente io pensavo a qualcosa di divulgativo proprio per cercare di abbattere tutti i pregiudizi che ci sono nei confronti di noi formule. Questi infatti limitano la nostra libertà espressiva e ci costringono a non uscire, se non in casi eccezionali, dai nostri ghetti. Pur di evitare la nostra presenza si preferisce sostituirci con frasi difficilmente comprensibili molto lunghe e, quel che è peggio, spesso variamente interpretabili.

Direttore Sono i lettori che vogliono essere confortati dall'assenza di formule quando vogliono informarsi su argomenti scientifici.

Formula Non crede che le scelte editoriali dovrebbero servire anche ad educare i lettori? Magari con qualche formula ben spiegata. Anche la storia potrebbe aiutare. L'algebra retorica, l'algebra raccontata a parole, fallì nel sedicesimo secolo. Servirono molti versi a Niccolò Fontana detto il Tartaglia, quello del famoso triangolo aritmetico che in Italia porta il suo nome, per spiegare come risolvere le equazioni di terzo grado di cui era fiero di aver trovato quella soluzione sfuggita agli antichi greci.

> Quando che 'l cubo con le cose appresso
> se agguaglia a qualche numero discreto
> trovan dui altri differenti in esso.
> ...

Seguono ancora una ventina di versi[1] e sarei proprio curiosa di conoscere anche un solo lettore che si possa giovare, nella sua comprensione di queste equazioni, dell'assenza di una formula a favore di questi versi pur scritti con una notevole arte.

Direttore Mi mette in difficoltà. Ammetto il fatto che le formule in genere subiscano discriminazioni. E anche che la divulgazione della matematica e della sua storia possano lasciare a desiderare. Questo però mi sembra difficilmente evitabile. Ci sono leggi di mercato... Comunque mi ha incuriosito. Potrebbe spiegarmi nel modo più chiaro possibile la sua identità?

Formula Certo, sono una formula ormai quasi del tutto dimenticata ma sono servita in passato per calcolare i numeri di Bernoulli. E anche se ora in questa veste non sono più di moda da quasi due secoli, il tempo non ha potuto e non potrà mai diminuire le mie capacità.

Direttore I numeri di Bernoulli? Mai sentiti. Bernoulli invece mi pare di averlo sentito. Era forse un fisico?

Formula Quella dei Bernoulli fu una famiglia che diede un grosso contributo alla scienza non solo in matematica ma anche in Fisica e perfino in Botanica. Ebbe, nell'arco di un secolo e mezzo, una decina di esponenti di gran rilievo. Per questo anche un asteroide della fascia tra Marte e Giove :" 2034 Bernoulli" porta quel cognome. E anche un cratere lunare. La famiglia era originaria di Anversa ma si rifugiò a Basilea per sfuggire al massacro degli Ugonotti messo in atto dai Cattolici. Jacob Bernoulli (Basilea 1654 - Basilea 1705) fu il primo della "dinastia". Il suo libro "Ars Conjectandi" fu pubblicato postumo dal fratello nel 1713. Il libro fece conoscere al mondo una meravigliosa formula.

Direttore Un'altra formula?

Formula Ultimamente ho fatto delle ricerche genealogiche e ho scoperto di discendere direttamente da lei. E' la mia genitrice! Del resto le somiglio non poco. Guardi qui, - presentando due documenti - il primo mi rappresenta,

[1] Tartaglias poem

sono proprio io giovane come fui pubblicata e utilizzata in una famosa “nota G”di cui poi le parlerò, in cui veniva presentato, nel lontano 1842 se non sbaglio, con notevole anticipo sui tempi, il primo programma per elaboratore della storia, il secondo è una copia di una pagina delladell'Ars Conjectandi di Jacob Bernoulli [2]. Lei non nota una certa somiglianza?

$$\left.\begin{array}{r} 0 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2n-1}{2n+1} + \mathrm{B}_1\left(\frac{2n}{2}\right) + \mathrm{B}_3\left(\frac{2n\cdot(2n-1)\cdot(2n-2)}{2\cdot3\cdot4}\right) + \\ + \mathrm{B}_5\left(\frac{2n\cdot(2n-1)\ldots(2n-4)}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}\right) + \cdots + \mathrm{B}_{2n-1} \end{array}\right\}$$

Figura 1: La formula come pubblicata nella "nota G" [5]

Direttore Vediamo... Sì, lei la riconosco anche se mi pare che i numeri di quelle "B" siano diversi...

Formula Ha ragione, ma non sono io ad essere cambiata sono le convenzioni attuali ad averlo fatto. Io mi sono dovuta adeguare. Jacob indicò con A, B, C ... quella straordinaria sequenza numerica a cui dopo la sua morte fu assegnato il suo cognome. Questo, come può facilmente constatare, risulta chiaramente in fondo alla pagina che le ho mostrato. Questa sequenza numerica però è infinita mentre l'alfabeto presto esaurisce i suoi simboli. Sembrò molto meglio quindi etichettare quei numeri con l'iniziale bernoulliana seguita da un numero progressivo. Dunque ai tempi di quella mia pubblicazione quegli stessi numeri erano chiamati B_1,B_3,B_5 ...

Direttore Invece oggi non è più così?

Formula No. Sono stati aggiunti due numeri all'inizio della sequenza che Bernoulli non aveva considerato.

Direttore Quindi due numeri di Bernoulli che non sono suoi.

Formula In un certo senso è paradossale ma è stato fatto per motivi di ... comodità. Perché così le proprietà di questi numeri vengono espresse in modo più semplice. Del resto nello studio della matematica attraverso i secoli questi numeri sono comparsi inattesi anche in problemi molto diversi da quello attraverso il quale erano stati scoperti. Ora si indicano con B_0, B_1, B_2 ... Dunque sono stata costretta ad aggiornarmi e i mieiB_1, B_3, B_5 ... sono dovuti diventare B_2, B_4, B_6... Ma è solo una questione di nomi. La sostanza non è mutata.

Direttore Ho capito gli indici dispari sono diventati pari ma perché saltare degli indici? Non dovrebbe essere: B_0, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5...

Formula Infatti è proprio così ma, siccome si dimostra che da B3 in poi tutti i numeri con indice dispari valgono zero, a volte vengono omessi

Direttore Sto vedendo la pagina, ho trovato in fondo i valori di A, B, C, D... che ora vengono indicati con B_2, B_4, B_6, B_8... ma è un testo in latino!

... Atque si porrò ad altiores gradatim potestates pergere, levique negotio sequentem adornare laterculum licet :

Summae Potestatum

$\int n = \frac{1}{2}nn + \frac{1}{2}n$

$\int nn = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}nn + \frac{1}{6}n$

$\int n^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}nn$

$\int n^4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$

$\int n^5 = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}nn$

$\int n^6 = \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n$

$-\frac{3}{20}$

$\int n^7 = \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{1}{12}nn$

$\int n^8 = \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \frac{2}{9}n^3 - \frac{1}{30}n$

$\int n^9 = \frac{1}{10}n^{10} + \frac{1}{2}n^9 + \frac{3}{4}n^8 - \frac{7}{10}n^6 + \frac{1}{2}n^4 - \frac{1}{12}nn$

$\int n^{10} = \frac{1}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^9 - 1n^7 + 1n^5 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{5}{66}n$

Quin imò qui legem progressionis inibi attentuis ensperexit, eundem etiam continuare poterit absque his ratiociniorum ambabimus : Sumtâ enim c pro potestatis cujuslibet exponente, fit summa omnium n^c seu

$$\int n^c = \frac{1}{c+1}n^{c+1} + \frac{1}{2}n^c + \frac{c}{2}An^{c-1} + \frac{c \cdot c-1 \cdot c-2}{2 \cdot 3 \cdot 4}Bn^{c-3}$$
$$+\frac{c \cdot c-1 \cdot c-2 \cdot c-3 \cdot c-4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}Cn^{c-5}$$
$$+\frac{c \cdot c-1 \cdot c-2 \cdot c-3 \cdot c-4 \cdot c-5 \cdot c-6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}Dn^{c-7} \cdots \text{\& ita deinceps,}$$

exponentem potestatis ipsius n continué minuendo binario, quosque perveniatur ad n vel nn. Literae capitales A, B, C, D & c. ordine denotant coëfficientes ultimorum terminorum pro $\int nn$, $\int n^4$, $\int n^6$, $\int n^8$, & c. nempe

$$A = \frac{1}{6}, B = -\frac{1}{30}, C = \frac{1}{42}, D = -\frac{1}{30}.$$

Figura 2: La formula rivelata é a pag.97 di “Ars conjectandi” [2]

Formula Sì. In quei tempi il latino era lingua internazionale adottata dagli scienziati. Anche Newton per esempio pubblicò in latino le sue rivoluzionarie scoperte.

Direttore A scuola ero bravo in latino e anche in matematica ma ormai ricordo molto poco. Individuo anche strani segni che, se le mie reminiscenze scolastiche non mi tradiscono, dovrebbero essere degli integrali.

Formula Gli integrali sono pur sempre somme anche se di infiniti addendi infinitesimali (cioè diciamo pure infinitamente piccoli) ma qui l’analisi matematica non c’entra nulla. Più semplicemente quei segni che a ben vedere sono delle esse deformate indicano somme. Oggi allo stesso scopo useremmo sigma, la esse dell’alfabeto greco, per cui potremmo scrivere:

$$\sum n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

$$\sum nn = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

$$\sum n^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$$

$$\sum n^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4$$

e che potrebbe leggersi somme di interi consecutivi della potenza indicata fino al termine indicato. Ho detto potrebbe perché in realtà oggi i matematici preferiscono scrivere la stessa cosa così:

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4$$

in questo modo viene descritto in funzione di un simbolo indicato con k, o se si preferisce con qualsiasi altra lettera (distinta da n), il generico addendo. I vari addendi si ottengono sostituendo al posto di k valori successivi che vanno da 1 fino a n. Ecco anche qualche esempio numerico:

$$\sum_{k=1}^{5} k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

$$\sum_{k=1}^{4} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$$

$$\sum_{k=1}^{2} k^3 = 1^3 + 2^3 = 1 + 8 = 9$$

$$\sum_{k=1}^{1} k^4 = 1^4 = 1$$

Direttore Ho capito, ho capito, dunque Bernoulli considera le sue somme di potenze (Summae potestatum) fino alla decima potenza. Però uguaglia queste somme a dei polinomi di grado crescente.

Formula Infatti. Questi polinomi

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^2 - \frac{1}{30}n$$

corrispondono ad un modo alternativo di calcolare quelle somme. Per esempio con i precedenti esempi si trova facilmente:

$$\sum_{k=1}^{5} k = \frac{1}{2}5^2 + \frac{1}{2}5 = \frac{30}{2} = 15$$

$$\sum_{k=1}^{4} k^2 = \frac{1}{3}4^3 + \frac{1}{2}4^2 + \frac{1}{6}4 = \frac{180}{6} = 30$$

$$\sum_{k=1}^{2} k^3 = \frac{1}{4}2^4 + \frac{1}{2}2^3 + \frac{1}{4}2^2 = \frac{36}{4} = 9$$

$$\sum_{k=1}^{1} k^4 = \frac{1}{5}1^5 + \frac{1}{2}1^4 + \frac{1}{3}1^2 - \frac{1}{30}1 = \frac{30}{30} = 1$$

Direttore Negli esempi scelti i polinomi sembrano complicare invece che semplificare il lavoro.

Formula Solo perché i valori scelti per n sono molto piccoli. Al crescere di n diventa assai più conveniente calcolare i risultati mediante i polinomi. Jacob Bernoulli stesso racconta di aver potuto calcolare, grazie al polinomio, questo numero enorme in meno di otto minuti! [2]

$$\sum_{k=1}^{1000} k^{10} = 91409924241424243424241924242500$$

[2] [2] pag.98 "intra semi-qudrantem horae"

Direttore Strano questo enorme numero con parziale ripetizione di 24. Credo che avrei qualche difficoltà a controllarne la correttezza anche con i nostri potenti personal computer...

Formula Allora le racconterò di un giovanissimo allievo di otto anni in una scuola tedesca della fine del diciottesimo secolo. La classe era dotata di piccole lavagne personali e il maestro per tenerla occupata nella sua ora diede il compito di sommare i numeri interi da 1 fino a 100. La classe si mise diligentemente al lavoro mentre il maestro in attesa si dedicava ad altro. Un solo alunno, di nome Carl, consegnò immediatamente il suo compito, gli altri passarono l'ora a far somme su somme prima di consegnare a loro volta. Alla fine però, sorprendentemente, un solo compito risultò svolto correttamente e fu proprio quello del giovane e promettente Carl [3].

Direttore Come ha fatto? Forse conosceva la scorciatoia e ha calcolato a mente il polinomio di secondo grado?

Formula Forse, ma mi pare difficile che la conoscesse a quell'età. Non è neanche detto che la conoscesse il suo maestro elementare o forse la teneva solo per sé per far esercitare meccanicamente i suoi allievi e poter poi controllare agevolmente la correttezza del risultato. Le somme di interi successivi (a potenza uno) sono i famosi numeri triangolari (1,3,6,10,15,21,28,36...) ben conosciuti e studiati già al tempo di Pitagora. Può darsi che sia stata proprio l'idea del calcolo dell'area del triangolo ad aver colpito e guidato il piccolo. La somma da 1 a 100 può visualizzarsi come un istogramma, una serie di barre una accanto all'altra con altezze crescenti da 1 via via fino a 100. Proprio come nel caso del triangolo basta ruotare con l'immaginazione una copia dell'istogramma stesso e aggiungerlo, sottosopra, all'originale per avere una figura più facile da calcolare. Con il proseguimento delle barre crescenti con quelle decrescenti capovolte si ottengono 100 altezze tutte uguali: $100 + 1 = 99 + 2 = 98 + 3 = ...$ Ora il conto totale è immediato $101 * 100 = 10100$ ma il risultato è il doppio di ciò che serviva. Dunque va dimezzato: 5050. Proprio il numero scritto dal piccolo sulla sua lavagnetta.

Direttore Niente polinomio in questo caso, allora?

Formula Possiamo anche dire che si è servito di quel polinomio prima ancora di aver studiato l'algebra. Infatti se generalizziamo con un qualsiasi n i conti fatti:

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

Direttore Bene, bene. Ma solo ora sto notando la sua genitrice. E' sviluppata su tre righe nella seconda metà della pagina. Esprime un generico

[3] Carl Friedric Gauss (Brownschweig 1777 - Gottinga 1855) diventerà un grande matematico, fisico e astronomo

polinomio dopo i dieci già riportati. Qualche somiglianza la noto, mi pare che abbiate molti denominatori in comune. Però mi faccia vedere se ho ben capito a cosa serve. Con c=11 dovrei ottenere il polinomio che continua la serie.

Formula Se si vuole capire una di noi formule la cosa migliore è assumere un atteggiamento attivo, per esempio provando il nostro funzionamento in semplici casi concreti, senza dimenticare, quando possibile, le necessarie verifiche.

Direttore Mi ha incuriosito. Ora prendo una matita e provo a vedere cosa viene. Ultimamente mi sono esercitato con le frazioni aiutando mio figlio che fa le scuole medie a fare i compiti. Mi metterò alla prova.

Formula Benissimo. Attenzione a quei prodotti a numeratore come $c.c-1.c-2$ che sottintendono le parentesi. Oggi verrebbero scritte così $c(c-1)(c-2)$.

-Poco dopo-

Direttore Ecco ho seguito tutta la formula fino ai puntini.

$$\sum_{k=1}^{n} k^{11} = \frac{1}{12}n^{12} + \frac{1}{2}n^{11} + \frac{11}{12}n^{10} - \frac{11}{8}n^{8} + \frac{11}{6}n^{6} + ...$$

Calcoli e semplificazioni non sono difficili. Ora mi mancano due monomi di quarto e di secondo grado. Immagino di dover continuare aumentando due fattori a numeratore e due a denominatore come è stato finora.

Formula Perfetto c'è solo da tener presente $B_{10} = \frac{5}{66}$ coefficiente del monomio di primo grado del polinomio di decimo.

-Infine-

$$\sum_{k=1}^{n} k^{11} = \frac{1}{12}n^{12} + \frac{1}{2}n^{11} + \frac{11}{12}n^{10} - \frac{11}{8}n^{8} + \frac{11}{6}n^{6} - \frac{11}{8}n^{4} + \frac{5}{12}n^{2}$$

Direttore Ecco tutto il polinomio. Ho controllato più volte. Mi sembra corretto.

Formula Anche a me sembra corretto. Ma possiamo verificare.

Direttore Come?

Formula La formula figlia che ha ottenuto vale per $n = 1, 2, 3, 4\ldots$ dunque si potrebbero fare infinite prove. La più semplice è per n=1. La sommatoria con un solo termine deve essere 1. Proviamo:

$$\sum_{k=1}^{1} k^{11} = \frac{1}{12}+\frac{1}{2}+\frac{11}{12}-\frac{11}{8}+\frac{11}{6}-\frac{11}{8}+\frac{5}{12} = \frac{2+12+22-33+44-33+10}{24} = 1$$

Confermato. Complimenti.

Direttore Grazie, grazie. E' stato divertente capire questa vecchia formula. Anche se il suo funzionamento rimane un po' misterioso.

Formula La dimostrazione, anzi le dimostrazioni perché ce ne sono diverse, sono più complesse e ora sarebbero premature. Del resto neppure Jacob Bernoulli poté dimostrare la sua formula.

Direttore Bene. Ma la formula che ho ottenuto, quel polinomio di dodicesimo grado che calcola la somma delle undicesime potenze degli interi successivi è in qualche modo figlia della formula di Bernoulli. Non sarete mica sorelle?

Formula Sì, sì in un certo senso lo siamo anche se non ci somigliamo. Anche io sono un caso particolare della formula rivelata in Ars Conjectandi. Sono quel che si ottiene nel caso semplice in cui n=1.

Direttore Il caso $n = 1$? Proprio quello che ci è servito a verificare il mio polinomio?

Formula Sì, ma in un caso più generale. Ecco qui cosa si ottiene in quella famosa formula nel caso particolare $n = 1$:

$$1 = \frac{1}{c+1} + \frac{1}{2} + \frac{c}{2}B_2 + \frac{c(c-1)(c-2)}{2{\cdot}3{\cdot}4}B_4 + \frac{c(c-1)(c-2)(c-3)(c-4)}{2{\cdot}3{\cdot}4{\cdot}5{\cdot}6}B_6 + \dots$$

$$0 = \frac{1}{c+1} - \frac{1}{2} + \frac{c}{2}B_2 + \dots$$

Nel secondo passaggio si è sottratto 1 ai due membri dell'equazione. Continuando con la messa in evidenza, ossia con la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma, abbiamo:

$$0 = -\frac{1}{2}(\frac{-2}{c+1} + 1) + \frac{c}{2}B_2 + \dots$$

$$0 = -\frac{1}{2}\frac{c-1}{c+1} + \frac{c}{2}B_2 + \dots$$

Ora per arrivare proprio alla veste con cui fui presentata dalla Contessa nella sua pubblicazione:

Oh no! Mi scusi direttore questa è la veste che la Contessa scelse per sé in quell'occasione non quella con cui presentò me. Per la mia, al punto in cui siamo arrivati basta sostituire c con 2n, indicante un generico numero pari, per ottenere:

$$0 = -\frac{1}{2}\frac{c-1}{c+1} + \frac{c}{2}B_2 + \frac{c(c-1)(c-2)}{2\cdot 3\cdot 4}B_4 + \frac{c(c-1)(c-2)(c-3)(c-4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}B_6 + \cdots + B_{2n}$$

Infine se vogliamo essere precisi tenendo conto del modo di esprimere i nostri numeri in quel tempo, eccomi proprio con quella precisa veste storica:

$$0 = -\frac{1}{2}\frac{c-1}{c+1} + \frac{c}{2}B_1 + \frac{c(c-1)(c-2)}{2\cdot 3\cdot 4}B_3 + \frac{c(c-1)(c-2)(c-3)(c-4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}B_5 + \cdots + B_{2n-1}$$

Gli indici dispari sono quelli che si usavano in quei tempi, l'ordine dei fattori invertito in ogni addendo non ne cambia il risultato... -mentre si commuove - mi scusi direttore quel mio vestito non sarà splendido come quello della Contessa ma sono assai sensibile a questi ricordi...

Direttore Su,su! Non faccia così. Ma mi dica, chi era questa contessa?

Formula Ada Augusta Byron, figlia legittima del famoso poeta romantico e di Annabella Millbanke, appassionata cultrice di matematica. Nata a Londra nel 1815, crebbe allevata solo dalla madre che le diede un'ottima educazione indirizzandola verso lo studio della matematica. A venti anni sposò William King-Noel che le diede tre figli oltre al titolo di contessa di Lovelace. Morirà a soli trentasei anni la stessa età che fu fatale al padre che non vide mai. Sì, è lei la valente matematica, la giovane visionaria affascinata dalle potenzialità delle nuove tecnologie che scrisse il primo programma della storia dell'informatica quando l'informatica ancora non esisteva! Suonava magnificamente arpa e piano, era un' incantatrice di numeri e di formule. Da anni collaborava con un altro eccezionale visionario, Charles Babbage che aveva progettato niente meno che un computer meccanico, la macchina analitica. Una macchina che per motivi economici non fu mai costruita se non recentemente, in parte, per il museo della scienza di Londra.

Direttore Un personaggio molto interessante e assai fuori del comune. Come vi siete conosciute?

Formula Ci conoscemmo quando insieme ad altre due amiche che, come me, erano in grado di calcolare i numeri di Bernoulli eravamo in competizione per un posto in quel primo programma che la giovane contessa aveva in mente di realizzare. Non che fossimo già consapevoli del momento storico che stavamo vivendo ma in qualche modo eravamo soggiogate dal fascino della nostra incantatrice e desideravamo intensamente essere scelte. Ci studiò e ci comparò con molta cura. Alla fine la scelta cadde su di me. Ringraziò gentilmente tutte e tre per la nostra gentile collaborazione e per aver arricchito le sue conoscenze matematiche. Spiegò di aver scelto in base alle esigenze della macchina la cui potenzialità doveva essere collaudata con il programma che avrebbe scritto. Mi dispiacque per le mie amiche che comunque ebbero l'onore di essere menzionate nei suoi scritti ma fui davvero felice di quella scelta.

Direttore Davvero interessante ma prima di proseguire nel suo racconto vorrei capire una cosa. In che modo lei è in grado di calcolare questi numeri di Bernoulli?

Formula In modo ricorsivo. Al crescere di n aumentano le "B" della mia formula. Dunque basta sostituirvi tutti i numeri precedentemente trovati per trovare il nuovo, l'ultimo addendo, considerato come incognita dell'equazione.

Direttore Vediamo nel nostro caso siamo arrivati a conoscere $B_1 = \frac{5}{66}$ poi $B_{11} = 0$ dobbiamo trovare B_{12}. Questo compare come ultimo addendo quando $n = 6$ e $2n = 12$. Mi faccia provare. -poco dopo, riempito un intero foglio con non poche moltiplicazioni e divisioni ordinate con cura- Devo aver sbagliato qualcosa mi viene $B_{12} = -\frac{691}{2730}$ che non si semplifica. Mi pare strano. Deve esserci un errore.

Formula Assolutamente corretto invece, complimenti! Non si aspettava così presto un numero con tante cifre a numeratore e a denominatore? Pensi che il prossimo invece sarà semplicemente $B_{14} = \frac{7}{6}$.

Direttore Lei li ricorda a memoria!. Ma come avrei potuto controllare altrimenti?

Formula Sì, ho buona memoria ma non li posso certo ricordare tutti Sono infiniti e dopo un po' le cifre da ricordare anche di un solo numero sono davvero troppe. Per controllare le rivelerò una bellissima proprietà scoperta, proprio ai tempi della contessa, indipendentemente, da due matematici Clausen e Staudt. Una sorprendente proprietà dei denominatori, di questi numeri.

Direttore Solo dei denominatori?

Formula Sì, sì, per fortuna. Altrimenti sarei diventata del tutto inutile. Quel 2730, denominatore di B_{12}, è il prodotto $2{\cdot}3{\cdot}5{\cdot}7{\cdot}13$.

Direttore Vero l'avevo scomposto ma non mi è servito a semplificare perché 691, il numeratore, dovrebbe essere un numero primo e comunque non contiene di quei fattori.

Formula Per trovare quel denominatore per altra via e quindi verificare, avrebbe potuto seguire il seguente algoritmo:

1. scrivere quello che i matematici chiamano il fattoriale del numero successivo all'indice
2. cancellare tutti i fattori non corrispondenti a numeri primi cioè con qualche divisore non banale. (Per esempio usando il crivello di Eratostene)
3. cancellare tutti i numeri primi residui tali che il loro predecessore non divide l'indice del numero in questione

Per esempio con B_{12} si parte dal fattoriale di 13 (13!): $2{\cdot}3{\cdot}4{\cdot}5{\cdot}6{\cdot}7{\cdot}8{\cdot}9{\cdot}10{\cdot}11{\cdot}12{\cdot}13$ Usiamo detto crivello (anche se superfluo finché non si hanno effettive difficoltà nel riconoscere numeri primi incontrati). Partiamo da 2 che manteniamo cancellando però tutti i suoi multipli: $2{\cdot}3{\cdot}5{\cdot}7{\cdot}9{\cdot}11{\cdot}13$ poi arriviamo al 3 che pure manteniamo cancellando i suoi multipli: $2{\cdot}3{\cdot}5{\cdot}7{\cdot}11{\cdot}13$ proseguendo fino al 13 la stringa rimane immutata. In questo modo sono rimasti solo i fattori primi, divisibili solo per se stessi e per l'unità. I predecessori di questi numeri sono rispettivamente: 1,2,4,6,10,12 di questi l'unico a non essere divisore dell'indice 12 è 10 dunque il suo successore 11 va escluso e rimane: $2{\cdot}3{\cdot}5{\cdot}7{\cdot}13 = 2730$

Direttore Provo subito con B_{14}: salto il crivello dato che non ho alcuna difficoltà a riconoscere numeri primi così piccoli. 15 è $3{\cdot}5$ Dunque i fattori primi sono: $5{\cdot}7{\cdot}11{\cdot}13$ proprio come prima ma questa volta solo i predecessori dei primi due dividono 14 quindi rimane: $2{\cdot}3 = 6$ un metodo velocissimo! Provo con B_{16} $2{\cdot}3{\cdot}5{\cdot}7{\cdot}11{\cdot}13{\cdot}17$ i predecessori: 1,2,4,6,10.12,16 dunque essendo i primi tre e l'ultimo divisori di 16 abbiamo: $2{\cdot}3{\cdot}5{\cdot}17 = 510$ Magnifico si può fare velocemente anche a mente!

Formula Ci sarebbe molto altro da raccontare su questi numeri che incantarono anche la contessa incantatrice. Ora però vorrei tornare alla pubblicazione della contessa che mi vide protagonista. Era l'inverno del 1843 la contessa stava traducendo dal francese un saggio di Luigi Manebrea sulla macchina di Babbage che era stato pubblicato a Ginevra l'anno precedente [5]e stava arricchendo quel testo con le sue sette note, A,B,C...

Direttore Con la musica? A, B, C ... dovrebbero nei paesi anglo-sassoni corrispondere a Do, Re, Mi...

Formula No, no, la musica questa volta non c'entra. Almeno che io sappia. Anche se la contessa era ben consapevole che quella macchina programmabile avrebbe potuto fare molto altro, oltre i calcoli matematici, musica compresa. Quelle note indicavano testi di approfondimento che alla fine superarono in ampiezza il testo tradotto. Li indicò con le prime sette lettere dell'alfabeto. L'ultima, la nota G, è dedicata al programma di collaudo. In quel testo, dopo un accenno anche alle mie due amiche, vengo presentata. Nessun cenno sulla mia discendenza dalla famosa formula di Bernoulli. Forse perché Bernoulli non poté dimostrare la formula che rivelò. Fatto sta che la contessa che di genealogie se ne intendeva, preferì rivelare e dimostrare una mia molto più complicata discendenza dalla funzione generatrice. Una funzione esponenziale che grazie ai prodigi dell'analisi matematica, sviluppata in serie infinita, mostra riprodotti in sequenza, distribuiti negli infiniti monomi, tutti i numeri di Bernoulli. Ecco come vengo presentata in un estratto della nota G [5]

If in the equation

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + B_1\frac{x^2}{2} + B_3\frac{x^4}{2\cdot 3\cdot 4} + B_5\frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \cdots \qquad (4.)$$

(in which B_1, B_3..., &c. are the Numbers of Bernoulli), we expand the denominator of the first side in powers of x, and then divide both numerator and denominator by x, we shall derive

$$1 = \left(1 - \frac{x}{2} + B_1\frac{x^2}{2} + B_3\frac{x^4}{2\cdot 3\cdot 4} + \cdots\right)\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2\cdot 3} + \frac{x^3}{2\cdot 3\cdot 4} + \cdots\right) \qquad (5.)$$

If this latter multiplication be actually performed, we shall have a series of the general form

$$1 + D_1x + D_2x^2 + D_3x^3 + \cdots \qquad (6.)$$

in which we see, first, that all the coefficients of the powers of x are severally equal to zero; and secondly, that the general form for D_{2n}, the coefficient of the $2n+1$th *term* (that is of x^{2n} any *even* power of x), is the following:—

Figura 3: Estratto della nota G [5] di Ada Lovelace in cui si giustifica la formula partendo dalla funzione generatrice

Direttore Noto qualche vaga somiglianza con lei (nei denominatori) ma nulla di più. Io feci il liceo classico e non ho mai studiato analisi matematica...

Formula Infatti. Era solo per dare un'idea della strada indicata. Spiegare questa mia discendenza richiederebbe nozioni di analisi matematica non molto elementari, poco adatte alle nostre intenzioni di divulgazione. Le mostrerò tuttavia il diagramma, parte integrante della nota G [5], dove vengo tradotta dalla contessa programmatrice in un algoritmo per la macchina analitica.

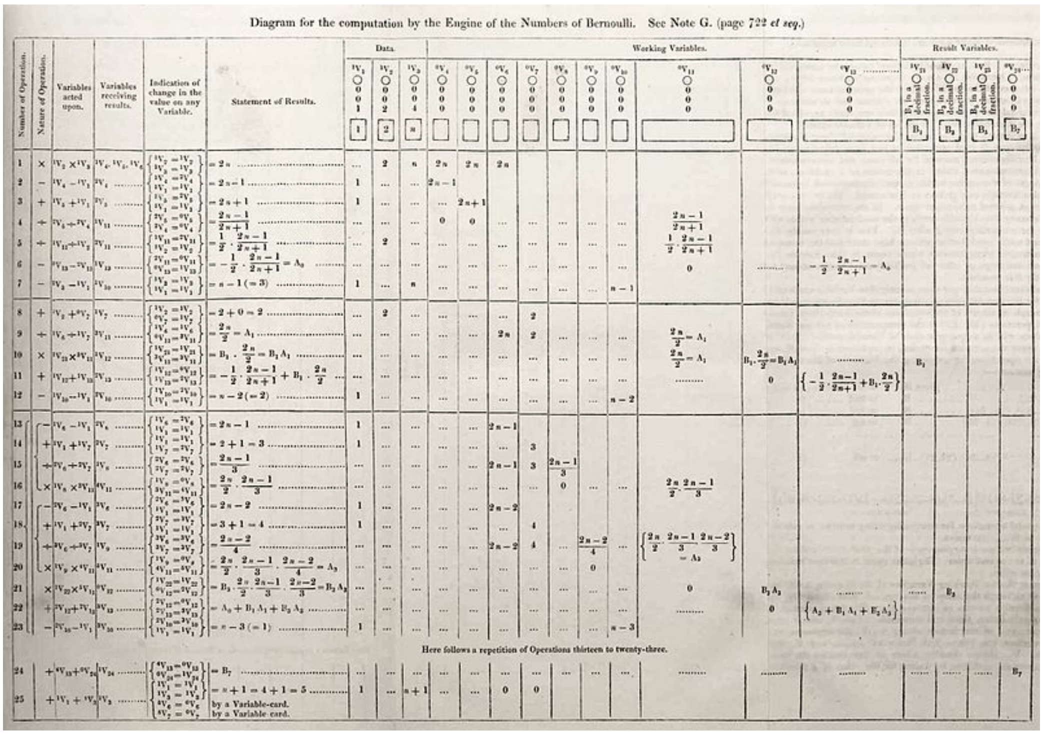

Figura 4: Diagramma della Nota G [5] di Ada Lovelace. Algoritmo per il calcolo dei numeri di Bernoulli in un programma pensato per la macchina analitica di Charles Babbage, un primo computer basato sulla meccanica che per i suoi alti costi non fu mai realizzato.

Direttore Molto suggestivo questo primo programma. Da quel che posso capire viene scomposta nelle sue parti per essere calcolata dalla macchina!

Formula Infatti. Quando fui scelta per quel ruolo non avevo nessuna idea di cosa avrei dovuto fare. Inutile dire che non solo per la storia ma anche per me era la prima esperienza del genere. Fu veramente molto emozionante. . .

Direttore Ma mi dica una cosa, lei lo saprà sicuramente. quando poi un secolo dopo i computer saranno effettivamente costruiti questa idea di utilizzarli per il calcolo dei numeri di Bernoulli è stata ripresa in considerazione?

Formula Altroché! sono stati calcolati milioni di questi numeri e si cerca di procedere migliorando ogni volta i risultati in una sorta di audace gara che sembra sfidare l'infinito. Ecco per esempio in siti specializzati3 cosa si può leggere. Ma anche non leggere per ragioni di spazio dato che a numeratore sono state omesse milioni di cifre

$$B_{2\,000\,000} = -\frac{1329775613657311363237415859\ldots3131145227911472514209002960697}{9601480183016524970884020224910}$$

More than 10 million digits were omitted in the middle of the numerator!

Figura 5: Oltre dieci milioni di cifre omesse! (fonte: https://www.bernoulli.org/)

Direttore Dieci milioni di cifre omesse! Per stamparle tutte servirebbe un libro piuttosto corposo. Almeno quanto un vocabolario! E lei? ha più avuto occasione di essere usata nei tempi moderni per calcolare questi numeri?

Formula In questa veste ormai fuori moda solo occasionalmente e sempre per motivi legati alla mia storia. Per esempio ultimamente lo ha fatto proprio l'autore di questo dialogo, lo stesso che mi ha convinto a rivolgermi a lei, signor direttore. E' un professore ormai in pensione da dieci anni, si chiama G.P., è autore del Tartapelago[4] e ha usato lo stesso linguaggio con cui ha costruito tante animazioni geometriche per il suo sito. Si tratta, niente meno, del Logo, il linguaggio delle tartarughe, inventato da Seymour Papert per scopi educativi. In particolare è MSWLogo, una versione per il sistema operativo Windows distribuita gratuitamente in rete dalla Softronix[5].

Direttore Autore? Finora l'ho seguita con attenzione e interesse. Ma ora non posso più crederle. Ho una formazione filosofica e ho sempre creduto nel libero arbitrio e soprattutto nella mia capacità di esercitarlo! Sono un razionalista che non crede ad entità trascendenti.

Formula Direttore, io sono solo una povera formula che poco sa di filosofia, ma posso assicurarle che il professore è un personaggio proprio come me e lei. E' possibile che, essendo anche autore si illuda di essere più di noi. Il suo ruolo lo richiede e deve fare la sua parte come noi la nostra del resto. Ma se è pur vero che l'autore si serve dei personaggi per esprimersi è altrettanto vero il contrario. Dunque, la prego, non si preoccupi e mi permetta di continuare.

Direttore Vuole dire che gli autori sono solo un mezzo attraverso il quale noi personaggi possiamo esprimerci? Così mi piace... ci rifletterò. Va bene... va bene continui pure. Mi racconti Come ha conosciuto questo professore.

Formula Bene e grazie per la fiducia! Il professore, nel corso di una sua personale ricerca sui numeri di Bernoulli [4], navigando su Internet si

[4] www.maecla.it/tartapelago/

[5] www.softronix.com

è imbattuto in molti siti in cui si parlava di me. Insoddisfatto di quel che ha potuto leggere ha voluto fare direttamente la mia conoscenza. Nei siti in lingua inglese ha potuto trovare preziosi riferimenti che lo hanno portato al documento fondamentale, quella nota G di cui già le ho parlato, scritta direttamente dalla contessa! Nulla di più però anche se vi erano tanti altri siti in cui ero ricordata. Mi si presentava, così come ero stata scritta, e poi si attingeva a quel poco che aveva scritto tanti anni prima la contessa. Guardi, per esempio 6

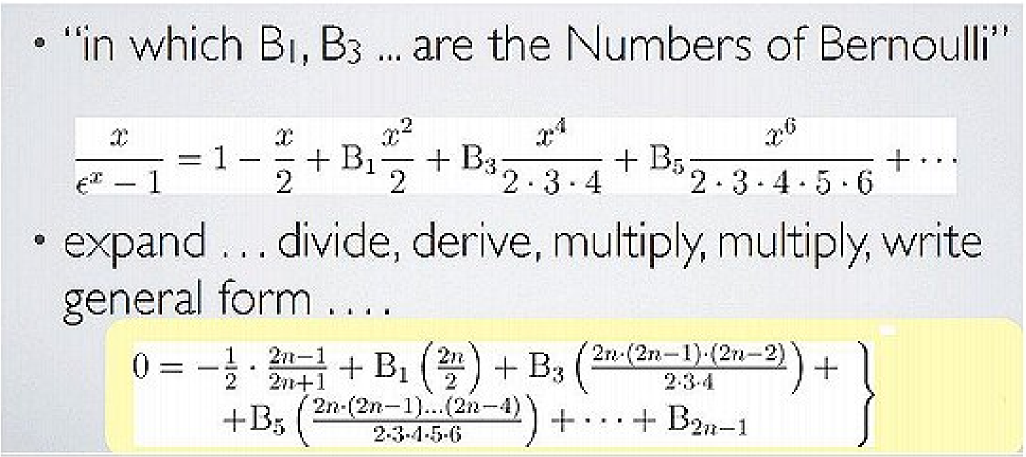

Figura 6: Immagine pubblicata in rete. Da "Charles Babbage Ada Lovelace and the Bernoulli number" di Thomas j.Misa University of Minnesota

In questo documento disponibile in rete si vede lo sviluppo in serie della funzione generatrice. Viene usata la notazione usata da Ada e la formula da lei effettivamente applicata. Sul modo per derivare questa da quella, anche qui, si dà solo un vago cenno.

Direttore Riconosco gli antichi indici dispari e anche quella funzione esponenziale generatrice da cui pure lei in qualche modo, a quanto pare, discende. Complimenti per i molti siti che la ricordano sia pure assai avari di notizie non stantie. Invece, nei siti in lingua italiana?

Formula Un vero disastro! I siti in lingua italiana hanno copiato formule errate e notizie false che hanno potuto replicarsi indisturbate per anni e ancora fanno un pessimo servizio in rete. A quanto è stato possibile appurare cominciò tutto con Wikipedia in lingua italiana quando nell'ormai lontano 2005 fu creata una voce a me dedicata dal titolo: "Algoritmo di Ada Lovelace per i numeri di Bernoulli". Era una gran cosa che mi si dedicasse una voce. L'intenzione era buona ma la sua realizzazione purtroppo assai difettosa. Io ero stata trascritta in modo sbagliato e quindi non funzionavo. Inoltre si cercava di dimostrare la mia discendenza dalla funzione generatrice e ci si riusciva ma solo grazie a grossolani errori! Poi mi si comparava con un'altra formula piuttosto strana che, sempre senza citare fonti, veniva attribuita a Bernoulli. Anche lei non funzionante! Nonostante una verifica in un caso particolare, falsata però da un arbitrario cambio di segno di uno dei numeri di Bernoulli. Anche se mal trascritta il professore ha potuto identificarla. Non mi risulta però che la contessa l'abbia mai presa in considerazione per quel ruolo. Inoltre, nella comparazione tra me e lei, mutavo leggermente, perdevo un errore ma ne acquisivo un altro.

Direttore E tutti questi errori sono stati segnalati? qualcuno ha provveduto a rimuoverli?

Formula Il professore da anonimo, non potendo tollerare tutte quelle sciocchezze sul mio conto ha riscritto completamente quella voce di wikipedia come risulta dalla cronologia della voce. Ha anche scritto un articolo per Maecla [6] in cui raccontava tutto ciò ma ormai dopo dodici anni di permanenza tutte quelle falsità erano state copiate in molti siti[6] e perfino in una tesi di laurea pubblicata in rete [7].

Direttore E cosa ha scritto su di lei? Ha parlato della sua discendenza dalla formula rivelata da Bernoulli?

Formula No, quella discendenza la scoprirà solo successivamente. Quello che ha mostrato però è un'altra sua sorprendente scoperta di cui pure nulla sapevo. Confesso di avere avuto, con queste rivelazioni, una vera e propria crisi d'identità che ha sconvolto non poco la mia vita. O forse ha sconvolto la mia "morte" perché ormai pensavo di essere solo un pezzo da museo legato indissolubilmente a quel che era stato. Non avevo consapevolezza di altro. Insomma, dato che non riuscivo a trovare mie tracce nei moderni trattati sui numeri di Bernoulli mi ero convinta di essere stata solo una formula "usa e getta" sia pure usata in un'unica e irripetibile occasione. Questo è quanto risultava da molti saggi che parlavano di me e di questo mi ero convinta anche io...

Direttore Già Socrate esortava a conoscere se stessi. Il suo percorso interiore è molto interessante. Mi pare che l'incontro con questo professore sia stato decisivo.

Formula Si, Mi ha collaudata prima usando un foglio di calcolo poi con il linguaggio Logo. Mi è sembrato di rinascere. Il professore ha saputo sviluppato tutte le mie potenzialità. Mi ha interrogata e ho risposto adeguatamente. Era un piacere sfornare in men che non si dica tutti quei numeri di Bernoulli!

[6] Ada Byron Lovelace e il primo algoritmo (non cita fonti); Ada Lovelace e il primo programma di calcolo della storia (non cita fonti); leparisien (cita fonte wikipedia.it)

[7] 3.1 L'algoritmo di Ada Lovelace per i numeri di Bernoulli

In questo modo alla fine si è accorto di avermi già incontrata. Si è accorto che la formula ricorsiva più agile e comune nei moderni trattati ero io stessa in abiti moderni! Proprio questo ha rivelato in anteprima sulla Wikipedia in lingua italiana quando, come anonimo numero 79.70.35.171, ha rifatto da capo la voce che mi riguardava su Wikipedia. Avrebbe potuto dare la dimostrazione corretta indicata negli scritti della contessa ma ha preferito dimostrare che io non ero altro in costume antico che quella formula ricorsiva oggi citata e usata comunemente. Ecco dunque -porgendo un'immagine al direttore- la mia identità ritrovata. Mi riconosce?

$$\sum_{k=1}^{m} \binom{m+1}{j} B_k = 0 \tag{1}$$

Direttore Assolutamente no! La formula sembra avere un certo fascino ma non riesco proprio a capirla. Mi può aiutare?

Formula Certo! Quel segno di sommatoria lo abbiamo già incontrato. Variando l'indice nel modo indicato possiamo costruirci tutti gli addendi:

$$\binom{m+1}{0} B_0 + \binom{m+1}{1} B_1 + \binom{m+1}{2} B_2 + \binom{m+1}{3} B_3 + \cdots + \binom{m+1}{m} B_m$$

Direttore Ora forse potrebbe esserci una vaga analogia strutturale ma cosa significano quelle parentesi con qualcosa scritto superiormente e qualcosa scritto inferiormente?

Formula Sono i coefficienti binomiali detti così perché si utilizzano in algebra per sviluppare le potenze del binomio.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

e in generale

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

che in forma compatta si scrive:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

I coefficienti, riassunti nel triangolo di Tartaglia sono:

$$
\begin{array}{c}
1\\
1\ 1\\
1\ 2\ 1\\
1\ 3\ 3\ 1\\
1\ 4\ 6\ 4\ 1\\
\dots
\end{array}
$$

Lo ricorda?

Direttore Sì mi par di ricordare una regola semplice per costruirlo...Ho trovato! Si sommano due elementi della riga superiore per ottenere i nuovi elementi.

Formula Bene, Quando si scrive per esempio 4 sopra 2 tra parentesi tonde si danno le coordinate per individuare un elemento del triangolo di Tartaglia. Tenga presente però che si parte da zero per cui la riga 4 è la quinta e il posto 2 è il terzo dunque 4 sopra 2 = 6. Ecco tutta la riga 4:

$$\binom{4}{0} = 1 \quad \binom{4}{1} = 4 \quad \binom{4}{2} = 6 \quad \binom{4}{3} = 4 \quad \binom{4}{4} = 1$$

Direttore Ho capito quindi quando si interpretano quei simboli ci si deve riferire al triangolo di Tartaglia

Formula Non necessariamente. Si può calcolare direttamente sfruttando il suo significato combinatorio. Può utilizzare la formula degli anagrammi:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k|(n-k)!} \quad \text{Esempio:} \quad \binom{4}{2} = \frac{4!}{2|(4-2)!} = \frac{24}{4} = 6$$

o anche semplificando

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k|(n-k)!} = \frac{n^{\underline{k}}(n-k)!}{k!(n-k)!} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}$$

$$\text{Esempio:} \quad \binom{5}{2} = \frac{5^{\underline{2}}}{2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

dove $n^{\underline{k}}$ è il cosiddetto "fattoriale discendente" costituito da k fattori che ogni volta scalano di un'unità partendo da n.

Direttore Anagrammi ? Mi hanno sempre divertito ma cosa c'entrano?

Formula Gli anagrammi delle parole con lettere tutte diverse corrispondono alle permutazioni. Se la loro lunghezza è due si hanno $2! = 2 \cdot 1 = 2$ possibilità per esempio “ok” e “ko”. Se la lunghezza della parola omvece è tre $3 \cdot 2! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$ possibilità per esempio “mia”, ”mai”, ”ami”, ”aim”, ”ima”, ”iam”. Se la lunghezza è 4 le parole potranno iniziare in 4 modi diversi. Per ognuno di questi casi abbiamo visto che ci sono 3! possibilità con le rimanenti

lettere. Dunque $4{\cdot}3! = 4! = 4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1 = 24$ possibilità. E così via. Se invece tra le lettere della parola di cui si vuole calcolare gli anagrammi ci sono doppioni se ne deve tener conto dividendo per le relative permutazioni. Per esempio "Ada" se consideriamo minuscolo e maiuscolo come due caratteri diversi abbiamo ancora 3! possibilità altrimenti diventano $\frac{3!}{2!} = 3$: *ADA DAA AAD*
.

Direttore Quindi
"BYRON" $5! = 120$ anagrammi e
"LOVELACE" $\frac{8!}{2!2!}$ anagrammi
dato che si ripetono due volte sia "L" che "A" mentre
"BABBAGE" $\frac{7!}{3!2!}$ anagrammi?

Formula Perfetto!,

Direttore Molto facile ma cosa c'entra con le potenza del binomio?

Formula Quando si fa $(a+b)^4$ si potrebbe fare $(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$ ottenendo $2{\cdot}2{\cdot}2{\cdot}2 = 2^4 = 16$ monomi simili di quarto grado:

$$\begin{aligned}
&aaaa + aaab + aaba + aabb+\\
&abaa + abab + abba + abbb+\\
&baaa + baab + baba + babb+\\
&bbaa + bbab + bbba + bbbb
\end{aligned}$$

se ora mettiamo insieme i monomi simili senza ancora sommarli:
$aaaa + (aaab + aaba + abaa + baaa) + (aabb + abab + abba + baab + baba + bbaa) + (abbb + babb + bbab + bbba) + bbbb$

Ora contando i monomi simili con la formula degli anagrammi si ottiene:

$$\frac{4!}{4!} = 1 \qquad \frac{4!}{3!} = 4 \qquad \frac{4!}{2!2!} = 6 \qquad \frac{4!}{3!} = 4 \qquad \frac{4!}{4!} = 1$$

che è proprio la riga 4 del triangolo di Tartaglia. Per cui tenendo conto delle proprietà delle operazioni si ha $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4)$

Direttore Molto interessante, non avevo mai visto le potenze di monomi da questo punto di vista! endo conto delle pr

Formula E' il punto di vista del calcolo combinatorio che è bello quanto utile. Ci sarebbe molto altro ma ora ci porterebbe fuori strada.

Direttore Va bene. Capiti i coefficienti binomiali ora può spiegarmi come fa ad identificarsi con quella formula moderna?

Formula Per riconoscermi deve prima di tutto sostituire $B_0 = 1$ e $B_1 = \frac{1}{2}$

Direttore Certo, questo per la verità mi era venuto in mente ma poi quei coefficienti binomiali la rendono comunque irriconoscibile. I più semplici li ho calcolati. Qualcosa sopra zero viene sempre 1 dato che tutte le righe iniziano così. Ma applicando la formula degli anagrammi mi ritrovo 0! che non so bene come interpretare. Anzi deve essere 1 perché solo così torna il risultato.

Formula Confermo, confermo deve porre $0! = 1$

Direttore Bene il sopra 1 come il suo simmetrico alla fine valgono $m + 1$. Provo a sostituire poi mi dirà. Parto da qui. Siccome $B_3 = 0$ metto il successivo e sostituisco i valori a B_1 e a B_2:

$$\binom{m+1}{0}(1)+\binom{m+1}{1}(-\frac{1}{2})+\binom{m+1}{2}B_2+\binom{m+1}{3}B_4+\cdots+\binom{m+1}{m}B_m = 0$$

$$1 + (m+1)(-\frac{1}{2}) + \binom{m+1}{2}B_2 + \binom{m+1}{3}B_4 + \cdots + (m+1)B_m = 0$$

$$-\frac{1}{2}(m-1) + \binom{m+1}{2}B_2 + \binom{m+1}{3}B_4 + \cdots + (m+1)B_m = 0$$

Infine moltiplicando i due membri dell'equazione per il reciproco di $m + 1$

$$-\frac{1}{2}\frac{m-1}{m+1} + \frac{1}{m+1}\binom{m+1}{2}B_2 + \frac{1}{m+1}\binom{m+1}{3}B_4 + \cdots + B_m = 0$$

Si, sì! Ora si comincia a vedere una somiglianza anche se parziale...

Formula Bravissimo.

Direttore Provo a sostituire ancora. Il sopra 2 indica due fattori a scalare come il sopra 4 ne indica 4... Dunque

$$-\frac{1}{2}\frac{m-1}{m+1}+\frac{1}{m+1}\frac{(m+1)m}{2}B_2+\frac{1}{m+1}\frac{(m+1)m(m-1)(m-2)}{4!}B_4+\cdots+B_m = 0$$

e semplificando

$$-\frac{1}{2}\frac{m-1}{m+1} + \frac{m}{2}B_2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{4{\cdot}3{\cdot}2}B_4 + \cdots + B_m = 0$$

Formula Eccellente, manca solo 2n come generico pari al posto di m e sono proprio io nella mia veste originale!

Direttore Mi è tutto chiaro. Ma allora se per lei esiste una veste moderna con cui ora ha potuto identificarsi, qualcosa di simile dovrebbe essere accaduto anche alla sua genitrice, la famosa formula rivelata da Bernoulli.

Formula No, per la mia genitrice fu più facile accorgersi dei mutamenti dato che lei era legata ad un problema specifico, quello della somma di potenze di interi successivi. Per me è stato molto più difficile in quanto sembravo indissolubilmente legata ad un evento unico ed irripetibile. Però, ora ho studiato bene l'abbigliamento moderno adottato dalle formule che trattano i numeri di Bernoulli e posso dire che il problema della mia genitrice fu che quando i matematici decisero di aggiungere i primi due numeri, si basarono sui coefficienti dello sviluppo in serie della funzione esponenziale a cui anche la contessa si era riferita. Posero perciò $B_0 = 1$ e $B_1 = -\frac{1}{2}$. In questo modo però esprimere la formula rivelata da Bernoulli diventava piuttosto artificioso. Infatti quella formula sembrava indicare invece che dovesse essere $B_1 = \frac{1}{2}$. Infatti in questo modo la formula

$$\sum_{k=1}^{n} k^m = \frac{1}{m+1} n^{m+1} + \frac{1}{2} n^m + \sum_{k=2}^{n} \frac{m^{\underline{k-1}}}{k!} B_k n^{m-k+1}$$

sarebbe diventata semplicemente:

$$\sum_{k=1}^{n} k^m = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} B_k n^{m+1-k} \tag{2}$$

Oggi molti autori accettano così questa formula avendo cura di avvertire il lettore di aver preso in considerazione una delle due varianti di questi numeri, quella con $B_1 = \frac{1}{2}$

Direttore E chi si rifiuta di considerare la legittimità delle due varianti della sequenza bernoulliana?

Formula Se ci si ostina a prendere in considerazione solo la variante $B_1 = -\frac{1}{2}$ si hanno due possibilità: La prima è un'equa sottrazione ai due membri dell'equazione bernoulliana per ottenere:

$$-n^m + \sum_{k=1}^{n} k^m = -n^m + \frac{1}{m+1} n^{m+1} + \frac{1}{2} n^m + \sum_{k=2}^{n} \frac{m^{\underline{k-1}}}{k!} B_k n^{m-k+1}$$

e quindi:

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^m = \frac{1}{m+1} n^{m+1} - \frac{1}{2} n^m + \sum_{k=2}^{n} \frac{m^{\underline{k-1}}}{k!} B_k n^{m-k+1}$$

la seconda è

$$\sum_{k=1}^{n} k^m = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m+1}{k} B_k n^{m+1-k}$$

Direttore E ora da dove esce quel "-1" elevato a potenza ?

Formula E' un artificio un po' esagerato che può essere evitato . Si introduce una moltitudine di fattori per cambiarne in realtà uno solo. Quando k è pari il risultato è l'elemento neutro della moltiplicazione che non cambia nulla. Con k dispari invece viene “-1” il cui prodotto muta nell’opposto le quantità moltiplicate. Quando però ad essere moltiplicato è zero nulla cambia comunque. E siccome le B con indice dispari valgono quasi sempre zero, l’unico effetto di quel prodotto esteso a tanti addendi è di cambiare segno a B1,

Direttore In effetti mi sembra meglio considerare le due varianti! Ma se nelle versioni moderne la sua genitrice si esprime nella variante $B_1 = \frac{1}{2}$ e lei invece nella variante $B_1 = -\frac{1}{2}$ la sua discendenza diretta non viene nascosta?

Formula E’ possibile che questo possa essere stato un ostacolo per molti nel riconoscere la mia discendenza. E’ possibile. Sicuramente dei tanti testi consultati nessuno ha mai messo in evidenza questa mia prestigiosa discendenza scoperta dal professore.

Direttore Vediamo se ho capito. Vorrei provare a vedere come arrivarci. Partiamo da questa moderna formula 2 valida con $B_1 = \frac{1}{2}$ e passiamo al caso particolare $n = 1$:

$$1 = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} B_k$$

Ora devo trasformare questa equazione. Moltiplicando i due membri dell’equazione per m+1 otteniamo:

$$m + 1 = \sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} B_k$$

Col secondo membro a parte il valore di B_1 ci siamo ora dovremmo togliere ai due membri $m + 1$ per ottenere lo zero. Sbaglio.

Formula No, è corretto. Prima però, supposto m>0, conviene esplicitare i primi due addendi con l’eventuale somma restante:

$$m + 1 = B_0 + (m + 1)(\frac{1}{2}) + \sum_{k=2}^{m} \binom{m+1}{k} B_k$$

ora non rimane che fare quel che ha detto.

Direttore Benissimo sommo -(m+1) ai due membri, metto in evidenza (m+1) ed ecco:

$$0 = B_0 + (m + 1)(-\frac{1}{2}) + \sum_{k=2}^{m} \binom{m+1}{k} B_k$$

Bello come un gioco di prestigio! Ora si può adottare la variante $B_1 = -\frac{1}{2}$ e scrivere:

$$0 = \sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} B_k$$

esattamrnte come le avevo mostrato 1

Formula Sì. C'è ancora da notare che quando m=0 vi è solo un addendo e il ragionamento precedente non vale. In questo caso si ha $1 = B_0$ che dà il primo valore della sequenza, necessario per il calcolo dei successivi. Ecco al crescere di m può ammirare le mie figlie. Solo le prime naturalmente tanto per averne un'idea perché sono un'infinità:

$$
\begin{aligned}
&1 = 1B_0 \\
&0 = 1B_0 + 2B_1 \\
&0 = 1B_0 + 3B_1 + 3B_2 \\
&0 = 1B_0 + 4B_1 + 6B_2 + 4B_3 \\
&0 = 1B_0 + 5B_1 + 10B_2 + 10B_3 + 5B_4 \\
&0 = 1B_0 + 6B_1 + 15B_2 + 20B_3 + 15B_4 + 6B_5 \\
&0 = 1B_0 + 7B_1 + 21B_2 + 35B_3 + 35B_4 + 21B_5 + 6B_6 \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

Direttore Bellissime. I miei complimenti!

Formula Grazie! Lei è molto gentile. Ha notato che insieme disegnano il triangolo di Tartaglia sia pure senza l'uno finale in ogni riga?

Direttore E' vero! Se le "B" invece degli indici avessero esponenti sembrerebbero sviluppi di potenza del binomio senza l'ultimo termine

Formula Infatti è una osservazione che i matematici non si sono lasciati sfuggire per confezionarci abiti semplicissimi e surreali che ci hanno reso però ancora meno riconoscibili! Ecco come possono apparire le mie figlie così conciate:

$$
\begin{aligned}
&1 = (B+1)^1 - B_1 \\
&0 = (B+1)^2 - B_2 \\
&0 = (B+1)^3 - B_3 \\
&0 = (B+1)^4 - B_4 \\
&0 = (B+1)^5 - B_5 \\
&0 = (B+1)^6 - B_6 \\
&0 = (B+1)^7 - B_7 \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

O ancora più semplicemente in una formulazione trasgressiva che sembra sfidare le più affermate consuetudini algebriche:

$$
\begin{aligned}
&(B+1)^1 = B^1 + 1 \\
&(B+1)^2 = B^2 \\
&(B+1)^3 = B^3 \\
&(B+1)^4 = B^4 \\
&(B+1)^5 = B^5
\end{aligned}
$$

$(B+1)^6 = B^6$
$(B+1)^7 = B^7$
$\dots$

Analogamente per $m > 1$ espressa con le pseudo-potenze ecco come posso apparire:

$$0 = (B+1)^m - B_m$$

e quindi anche:

$$(B+1)^m = B^m$$

Direttore A questo punto sono curioso di vedere la sua genitrice in questa particolare veste

Formula Eccola qui:

$$\sum_{k=1}^{n} k^m = \frac{(B+n)^{m+1} - B^{m+1}}{m+1}$$

Direttore Stupefacente! Ma quella B priva sia di indici sia di pseudo-esponenti che comunque sarebbero indici, da sola cosa è? Qual è la sua vera natura?

Formula Ehm...E' una domanda che mi mette in seria difficoltà. Anche a me inquieta un po' quella B solitaria. Di sicuro non è un numero che si possa sommare ad n, per poi calcolare la potenza. Sviluppare la "potenza" dello strano binomio è l'unica possibilità. Possiamo dire che è un ruolo numerico non interpretato da numeri. Possiamo anche dire che è ciò che rimane di un simbolo numerico dopo aver perso un indice con aspirazioni da esponente. Insomma è un qualcosa in perenne attesa di pseudo-esponenti che gli permettano di incarnarsi in simboli numerici fatti a sua somiglianza ma ben muniti di indici identificanti numeri bernoulliani. Spero di non averla confusa troppo...

Direttore No, no, anzi, la ringrazio. Amo queste riflessioni filosofiche. Mi chiedo anche come sia possibile che formule apparentemente così diverse possano essere espressione della stessa realtà matematica.

Formula Ma noi formule non siamo la matematica siamo soltanto un espediente valido, come quella B in fin dei conti, per aiutare a vedere il paesaggio matematico sottostante quello sì invariante nel tempo. Per questo nello studiare la matematica impararci solo a memoria non aiuta a vedere ciò che si dovrebbe. Molto meglio essere attivi, prendere iniziative, implementarci in un foglio di calcolo, collaudarci per mettere alla prova ciò che diciamo e per vedere se quel che si crede di aver capito si accorda o meno con i nostri risultati. Vede signor Direttore se io mi sono rivolta a lei non è solo per far conoscere la mia storia e la mia vera identità, sconosciute, poco conosciute o dimenticate che siano, ma è anche per far capire l'importanza del dialogo con noi formule. Io, come ha potuto constatare ora sono piuttosto loquace e ho preso l'iniziativa con lei. Ma in genere le mie colleghe sono molto più riservate e instaurare un dialogo con loro è meno facile ma le assicuro, altrettanto utile a capire ciò che è da loro indicato. Sono loro la via più semplice possibile per accedere alla conoscenza di ciò che indicano. E' vano dar credito ai tanti che preferiscono sostituirci con parole fumose che inevitabilmente lasciano il tempo che trovano...

Direttore E' stato un piacere dialogare con lei. Ho imparato e mi sono divertito fino a dimenticare per un po' il mio ruolo. Ora però, rientrando in me le posso solo dire che esamineremo insieme ai miei collaboratori la sua proposta e non è detto che il mio parere favorevole sia sufficiente. Come le dicevo ci sono delle leggi di mercato da tener presenti...

Riferimenti bibliografici

[1] Frank J. Swetz and Victor J. Katz Johann ,Mathematical treasures: Faulhaber's Accademiae Algebrae, MMA

[2] Jacob Bernoulli,Summae potestatum in Artis conjectandi, Internet Archive p.97, 1713

[3] Carl Jacobi, De usu legitimo formulae summatoriae Maclaurinianae. Journal für die reine und angewandte Mathematik. 12. pp. 263–72.,1834

[4] Sum of power of positive integer MMA, Mathematical association of America MMA

[5] Ada Lovelace Note G,in Luigi Manabrea, “Sketch the analitycal engine invented by Charles Babbage”,Ginevra, 1842

[6] Giorgio Pietrocola, Internet e l'algoritmo di Ada Byron, contessa di Lovelace e incantatrice di numeri, Maecla, 2017