Archimede

RIVISTA PER GLI INSEGNANTI E I CULTORI DI MATEMATICHE PURE E APPLICATE

ANNO LXXIV GENNAIO-MARZO 2022 1/2022

Le Monnier

Archimede

Un nuovo anno ha inizio con difficoltà che ancora si susseguono, sperando che per quando leggerete queste righe la situazione sia migliorata. Comunque ci sono almeno due motivi per festeggiare questo 2022. Il primo è che il 31 marzo si celebrano i primi 100 anni dell'Unione Matematica Italiana. L'altro è che si festeggiano gli 800 anni dell'Università di Padova. Con queste due ricorrenze abbiamo pensato di dare vita a una serie di quattro storie legate tra loro e dedicate ad alcuni matematici padovani e ai loro rapporti con Einstein, scritte da Alessandro Lise e disegnate da Dario Grillotti, autore anche delle copertine. La prima vede un incontro al Caffè Pedrocchi di Padova tra Gregorio Ricci Curbastro e Tullio Levi-Civita. E sempre alla relatività rimanda il secondo articolo di questo numero, scritto da Luca Granieri, che illustra certe proprietà matematiche legate alla necessità di essere affini per le trasformazioni di Lorentz. Apre questo numero un breve saggio di Giorgio Pietrocola sugli gnomoni, sia quelli che sono aurei che quelli che non lo sono. Tornano infine le Strane Storie Matematiche di Di Martino e Baccaglini Frank, in cui si discute sul concetto di uguale nella divisione col resto: voi cosa ne pensate?

LE MONNIER

SOMMARIO

ARTICOLI

GIORGIO PIETROCOLA, Gnomoni aurei e no 2

LUCA GRANIERI, Affinità relative 8

RUBRICHE

STRANE STORIE MATEMATICHE
«22 : 5 = 4 r 2» Ma siamo proprio sicuri che si scriva così? di Anna Baccaglini Frank e Pietro Di Martino con il contributo di Alessanro Ramploud e Silvia Funghi 20

ARCHILUDICA
I problemi di Maurizio Codogno 27

La palla è rotonda, dei Rudi Mat(h)ematici 29

ARCHIMEDIA
LC&RC: la fine, di Alessandro Lise e Dario Grillotti, a cura di Andrea Plazzi 35

A COLPO D'OCCHIO
di Roberto Zanasi 38

LA LEVA DI ARCHIMEDE
Matrici e immagini digitali con Python: dall'algebra matriciale al trattamento di immagini. Una proposta del Progetto Klein Italia, di Stefano Finzi Vita, Davide Passaro e Francesca Tovena 39

ARCHIMEDE LOGICA
Il gatto è vivo oppure morto, né vivo né morto. La logica della meccanica quantistica di Ruggero Pagnan 49

ENIGMISTICA MATEMATICA
a cura di Stefano Campi 56

GNOMONI AUREI E NO

di Giorgio Pietrocola

1. GNOMONI SECONDO ERONE

Nel 2005 scrissi una breve fiaba intitolata «Re Aureo e l'invasione degli gnomoni» [1]. Dal titolo però non è affatto facile capire cosa siano questi gnomoni invasori. L'appartenenza al genere fiabesco induce a ipotizzare che si tratti di grandi gnomi. Il titolo gioca sull'equivoco, ma non si tratta di gnomi fuori misura. Cosa sono allora questi gnomoni? Torniamo per ora alla fiaba citata che ha per protagonisti figure geometriche. Il protagonista principale, Re Aureo, è il ben noto rettangolo aureo. Un rettangolo con i lati in un particolare rapporto (ϕ = 1,6180...) detto appunto aureo. Gli invasori invece sono quadrati, una schiera infinita con lati sempre più piccoli ma sempre perfettamente corrispondenti al lato minore del rettangolo aureo che di volta in volta viene invaso. Ogni invasione riduce drasticamente l'area del rettangolo invaso che rimane tuttavia intatto nella sua originale forma aurea. Cosa giustifica l'appellativo di gnomoni dato a questi quadrati? Se si cerca «gnomone» sulla Treccani online, la particolare accezione usata nella fiaba non risulta menzionata. Non si tratta infatti né di «un'asta disposta verticalmente sul suolo, per misurare l'altezza del sole sull'orizzonte», che è notoriamente il più diffuso tra i significati di questo termine, né del particolare significato geometrico menzionato: «Figura geometrica piana costituita da ciò che rimane di un quadrato di lato AB se da esso si toglie un quadrato di lato AC (essendo C un punto di AB)». La seconda accezione riportata è tuttavia la più attinente a quella usata nella fiaba anche se andrà opportunamente generalizzata. Già negli Elementi di Euclide troviamo questo termine esteso a un qualsiasi parallelogramma (libro II, definizione II) [3]. La figura in grigio (vedi fig. 1) aggiunta al parallelogramma originario lo fa crescere mantenendone la forma. Per questo, come vedremo, viene chiamata gnomone di questa figura. Nel caso particolare del rettangolo disegnato accanto, lo gnomone è una sorta di squadra atta a tracciare angoli retti. Pare che sia proprio questo lo gnomo-

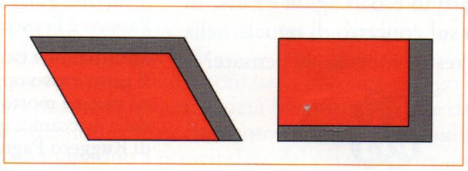

Figura 1 - Lo gnomone dei parallelogrammi di cui parla Euclide

ne a cui si riferisce Enopide di Chio, secondo il racconto di Proclo, quando afferma che il segmento perpendicolare era «secondo lo gnomone». Ciò potrebbe spiegare perché l'asta perpendicolare, atta a misurare mediante la sua ombra l'ora solare, ha lo stesso nome dello gnomone inteso come figura geometrica. Ma l'ulteriore generalizzazione, la più interessante dal punto di vista geometrico, quella usata nella fiaba citata, risale almeno al primo secolo. Come riferisce Zellini nel suo libro [3], Erone di Alessandria definisce uno gnomone, in generale, come ciò che «aggiunto a qualsiasi entità, numero o figura, rende il tutto simile all'entità a cui è stato aggiunto». Questa definizione fa luce sugli gnomoni della fiaba e ci autorizza a chiamare gnomone quel particolare quadrato che accostato al lato maggiore di un rettangolo aureo forma, insieme con questo, un rettangolo simile. Quando chiamiamo una persona zio, genitore o cugino in effetti sottintendiamo una relazione tra due persone che sono legate da quella particolare parentela. Analogamente quando a una figura si dà il nome di gnomone si sottintende in realtà una particolare relazione tra due figure. Infatti, come abbiamo visto, la definizione di gnomone coinvolge sempre una seconda figura. Ciò evidenzia l'opportunità di considerare la relazione «essere gnomone di» definita tra due figure geometriche. A è gnomone di B quando, scelte opportunamente le misure delle due figure, è possibile accostarle per ottenere una nuova figura simile a B. Possiamo dunque affermare che il quadrato è gnomone di un rettangolo aureo (avente la dimensione maggiore coincidente con il lato del quadrato stesso). È subito evidente che la relazione introdotta non è una relazione di equivalenza non soddisfacendo, per esempio, la proprietà simmetrica. Infatti se è vero che un opportuno quadrato è gnomone del rettangolo aureo, è falso il viceversa perché aggiungendo un rettangolo a un quadrato, non c'è evidentemente alcun modo di ottenere un altro quadrato. La mancata simmetria di questa relazione fa nascere l'esigenza di un nome per la relazione inversa. Potremmo perciò dire che se A è gnomone di B allora B è «gnomonsum» di A. In alternativa si può dire che B ha per gnomone A. Proprio come diciamo che se A è zio di B allora B è nipote di A o anche che B ha per zio A. Introdotta questa terminologia possiamo affermare che il rettangolo aureo è gnomonsum del quadrato (infinita accumulazione di quadrati) oppure che ha per gnomone un quadrato. Va notato che una figura può avere diversi gnomoni. Il rettangolo aureo, come abbiamo visto, si distingue infatti per avere, oltre ai vari gnomoni euclidei che esistono per ogni parallelogramma (vedi fig. 1), anche un altro gnomone di forma quadrata. È facile vedere che questa relazione non gode della proprietà riflessiva. Normalmente una figura non è gnomone di sé stessa. Questo fatto, falso in generale, può verificarsi in casi particolari? Anticipo che la risposta a questa domanda è affermativa. Non solo esistono alcuni frattali dalle forme insolite che hanno questa proprietà ma anche due poligoni a noi assai familiari! Sapreste individuarli? Daremo la soluzione alla fine di questo articolo. Una domanda analoga la possiamo porre per la proprietà simmetrica. Esistono due figure tali che A è gnomone di B e B è gnomone di A? Ho trovato una soluzione a questa domanda studiando i triangoli aurei ma ignoro se ne esistano o no altre.

2. TRIANGOLI AUREI

I triangoli aurei risultano particolarmente interessanti per approfondire il concetto di gnomone secondo Erone e meritano quindi di focalizzare la nostra attenzione. Sono triangoli isosceli con il lato maggiore e il lato minore in rapporto $\phi = 1{,}6180...$, il famoso numero di Fibonacci, lo stesso che notoriamente caratterizza il rettangolo aureo. Esistono due triangoli con questo aureo rapporto, uno acutangolo con angoli di 72°,72°,36° e uno ottusangolo con angoli di 36°,36°,108°. Questi due triangoli vengono a volte indicati rispettivamente come aureo di primo e aureo di secondo tipo [4]. Questa definizione, pur non essendo caratterizzante, mi sembra preferibile a quella che invece si sta affermando in varie lingue, compresa la nostra. Questa consiste nell'assegnare il nome «triangolo aureo» esclusivamente al triangolo aureo di primo tipo e il nome «gnomone aureo» a quello di secondo tipo. In una moltitudine di lingue, varie Wikipedie, indipendenti una dall'altra, concordano, nella voce dedicata, con questo modo di distinguere i due triangoli, modo che a me sembra invece assai infelice, per i motivi che mi accingo a esporre. Credo che il nome, oltre a essere breve, dovrebbe essere oggettivamente caratterizzante, cioè dovrebbe essere in grado di distinguere i due triangoli e non essere interscambiabile generando confusione mnemonica. Per questo proporrei di chiamare «acutaureo» il triangolo aureo acutangolo e «ottusaureo» il triangolo aureo ottusangolo. I nomi «triangolo aureo» e «gnomone aureo» non sono caratterizzanti ma interscambiabili proprio come i nomi «aureo di primo tipo» e «aureo di secondo tipo». Infatti entrambi sono triangoli aurei ed entrambi come vedremo sono gnomoni aurei. Se è vero infatti come mostrato in figura 2 che l'ottusaureo è gnomone dell'acutaureo, si può vedere che l'acutaureo ha varie occasioni di ricoprire il ruolo di gnomone aureo con diversi poligoni convessi, suoi gnomonsum, come mostra la figura 3 [6].

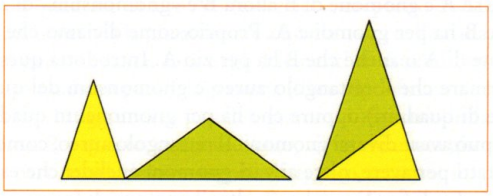

Figura 2 - Triangolo aureo acutangolo e triangolo aureo ottusangolo gnomone del primo

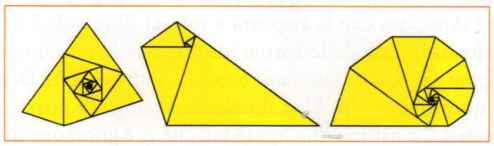

Figura 3 - Due quadrilateri e un ottagono: tre poligoni convessi che hanno per gnomone il triangolo isoscele aureo acutangolo

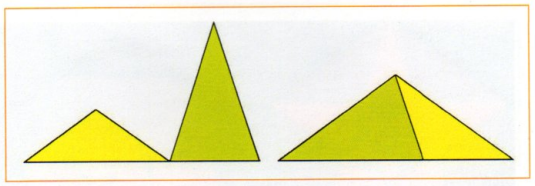

Figura 4 - Triangolo aureo ottusangolo e il suo gnomone aureo

A questo punto però si potrebbe obiettare che «gnomone aureo» sottintende la relazione evidenziata in figura 2 e si riferisce alla relazione con l'altro aureo creando quindi una reale differenza tra i due. In realtà la situazione non è sanabile perché i due triangoli aurei godono di una magnifica proprietà non solo rara ma probabilmente unica [5]. Infatti, come mostrato in figura 4, risulta anche che l'aureo acutangolo è lo gnomone dell'aureo ottusangolo.

Sono quindi uno lo gnomone dell'altro in una eccezionale reciprocità che li caratterizza valorizzandoli come coppia. Nei vari testi consultati nessuno parla di questa reciprocità, anche perché dovrebbero scrivere coerentemente che il loro «triangolo aureo» è gnomone dello «gnomone aureo». Una cacofonia insopportabile che sembra studiata per confondere le idee sull'accezione di un termine della tradizione geometrica greca già poco nota ai più. Perché allora dare maggior fama a una figura e metterne in ombra l'altra? Perché parlare del sublime triangolo aureo, riferendosi all'acutangolo, e limitarsi a un veloce accenno al suo gnomone, quasi fossero un nobile cavaliere e il suo fedele scudiero? I due triangoli aurei, in questa metafora, sono entrambi nobili cavalieri ed entrambi fedeli scudieri in ruoli interscambiabili! Su cosa si può basare allora una discriminazione a favore di uno dei due se non su un pregiudizio estetico, forse inconsapevole, che porta a preferire l'acutangolo smilzo all'ottusangolo tracagnotto? Eppure è insieme che i due triangoli aurei danno il meglio di sé creando meravigliose armonie. L'acutaureo (= acutangolo aureo) condividendo i suoi due lati maggiori con il lato maggiore di due ottusaurei (= ottusangoli aurei) forma il pentagono regolare. Se poi sui cinque lati uguali si mettono cinque acutaurei come punte si ottiene la famosissima stella pitagorica. Se tra le punte mettiamo cinque ottusaurei con i lati uguali coincidenti con quelli dell'acutaureo si forma un nuovo pentagono regolare. Quindi i dieci aurei complessivamente formano una sorta di anello pentagonale che è gnomone del pentagono regolare! Se dai tre triangoli aurei che abbiamo visto formare il pentagono regolare sottraiamo il doppione, rimangono un acutaureo e un ottusauro che insieme abbracciati formano un particolare trapezio isoscele. Questo a sua volta è lo gnomone di un magnifico pentagono (vedi figura 5) dove si osservano le diagonali diminuire verso l'infinitamente piccolo in progressione geometrica mentre interpolano una invisibile spirale logaritmica [7]. Osservando la base del trapezio maggiore si può capire che $r = 0{,}8154...$, la ragione della progressione geometrica, è soluzione dell'equazione $r^5 + r^4 + r = \phi$. Come se ciò non bastasse, i due

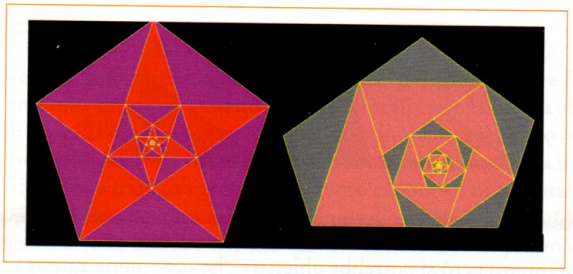

Figura 5 - Due pentagoni formati da un'infinità di triangoli aurei di due tipi, acutangolo e ottusangolo

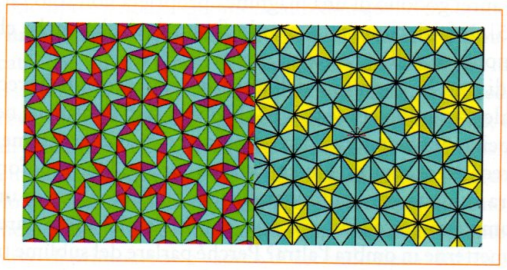

Figura 6 - Due particolari di tassellazioni aperiodiche di Penrose

armoniosi aurei, opportunamente accoppiati, possono formare i formidabili tasselli scoperti da Roger Penrose. Questi, a loro volta ben accoppiati, evolvendosi ricorsivamente, si espandono all'infinito tassellando il piano in modo non periodico (vedi figura 6).

3. SOLUZIONE DEL QUESITO POSTO

Esiste qualche figura che è lo gnomone di sé stessa? La risposta è affermativa. Non solo esistono alcuni frattali dalle forme insolite che hanno questa proprietà ma anche due poligoni a noi assai familiari [9]. Il primo è il triangolo rettangolo isoscele. Se si accostano i cateti e l'angolo retto di due esemplari si ottiene un nuovo triangolo rettangolo isoscele. Il secondo è il rettangolo espresso da un comune foglio di carta in formato A4 (vedi fig. 7). È noto che se si accostano sul lato maggiore due di questi fogli si ottiene il formato A3 simile ma più grande dell'A4. Il rapporto tra le dimensioni di questo speciale rettangolo è $\sqrt{2}$. Questa notevole proprietà include il nostro rettangolo e il mezzo quadrato, tra i rep-2 [9]. Dove «rep» sta per replicante, immaginando quindi, suggestionati dalla biologia, una

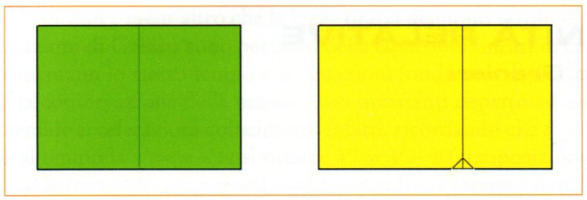

Figura 7 - Rettangolo gnomonico e rettangolo aureo a confronto

madre che si divida in due minuscole copie di sé che da adulte si replicheranno a loro volta. Oltre al rettangolo aureo sono abbastanza noti altri nobili rettangoli come quello d'argento (rapporto 2,4142...) e quello di plastica (rapporto 1,3247...) ma non mi pare che il nostro rettangolo, nonostante la sua sorprendente proprietà, sia mai stato accostato a questa ristretta élite [8]. Per i suoi indubbi meriti propongo quindi di ammetterlo con il nome di rettangolo gnomonico!

Giorgio Pietrocola
giorgio.pietrocola@gmail.com

Riferimenti bibliografici

[1] – G. Pietrocola, *Re aureo e l'invasione degli gnomoni*, Maecla, 2005.
– M. Monti – G. Pietrocola, *Re Aureo e l'invasione degli gnomoni* in Marco Monti, *Numeri in rivolta Fiabe di matematica e di fisica*, Haiku, Roma, 2018.
[2] *Euclide*, a cura di Maccioni, Frajese, Gli elementi di Euclide, UTET, Torino, 1970, pp.157-158.
[3] P. Zellini, *Gnomon. Una indagine sul numero*, Adelphi, Milano, 1999, p. 33.
[4] C. Baldovino, *Triangoli isosceli*, Progetto Polymat.
[5] G. Pietrocola, *Straordinaria reciprocità dei triangoli aurei*, Tartapelago, Maecla, 2017.
[6] G. Pietrocola, *Collezione di gnomoni*, Tartapelago, Maecla, 2005.
[7] G. Pietrocola, *Studio sulla tassellazione logaritmica del piano con triangoli simili*, Tartapelago, Maecla, 2005.
[8] G. Pietrocola, *Fiera dell'aureo*, Tartapelago, Maecla, 2016.
[9] – M. Gardner, *Figure piane che si ripetono in Enigmi e giochi matematici*, vol. 4, Sansoni, 1977.
– G. Pietrocola, *Mostra di rep-4*, Tartapelago, Maecla, 2009.