Figura 1: copertina

Archimede

Due articoli abbastanza singolari in questo ultimo numero di Archimede del 2021. Il primo è di Marco Ghimenti che ci parla di una classe di curve chiuse molto particolari: le curve ad ampiezza costante. Ovviamente ci sono i cerchi, ma ce ne sono altre. E si scopre che qualsiasi curva di ampiezza costante può rotolare tra due rette parallele, distanti quanto il suo diametro, restando sempre in ogni istante tangente ad entrambe. Il secondo, di Giorgio Pietrocola, si prefigge di indagare come trovare la somma di successioni di numeri elevati a una determinata potenza fissata, e mostra come le matrici binomiali intervengano in modo naturale in questa caratterizzazione.
Tra le rubriche ricordiamo che Paolo Alessandrini ci racconta tutto, ma proprio tutto, del rapporto, abbastanza stretto, tra Gianni Rodari e la matematica. La copertina e il fumetto di questo numero sono della giovane fumettista Gaia Fontana, che si cimenta con una storia su dei Quark in fuga. Il fascicolo si chiude con il consueto sommario annuale.

LE MONNIER

SOMMARIO

ARTICOLI

MARCO G. GHIMENTI, Curve di ampiezza costante 194

GIORGIO PIETROCOLA, Matrici binomiali per insiemi di polinomi calcolanti somme di potenze 202

RUBRICHE

A COLPO D'OCCHIO di Roberto Zanasi 216

ARCHIMEDE CULTURA La matematica delle storie e le storie della matematica, di Paolo Alessandrini 217

ARCHILUDICA I problemi di Maurizio Codogno 224

Questioni di equilibrio, dei Rudi Mat(h)ematici 226

ARCHIMEDIA So strange!, di Gaia Fontana, a cura di Andrea Plazzi 231

LA LEVA DI ARCHIMEDE Insegnare matematica con gli scacchi: spunti di attività per la scuola primaria e secondaria di primo grado di Domenico Bonavena e Davide Passaro 234

ARCHIMEDE LOGICA La geometria elementare di Alfred Tarski, di Ruggero Pagnan 245

ENIGMISTICA MATEMATICA a cura di Giusepe Pontrelli 254

INDICE DELL'ANNATA 2021 255

Figura 2: indice Archimede 4/2021

Archimede 4 2021

MATRICI BINOMIALI PER INSIEMI DI POLINOMI CALCOLANTI SOMME DI POTENZE

di Giorgio Pietrocola

1. INTRODUZIONE

1.1 UN PO' DI STORIA ANTICA

Nel 1713, otto anni dopo la morte di Jakob Bernoulli, la famiglia dà alle stampe il suo *Summae potestatum in Artis conjectandi* che oggi, grazie ad Internet Archive, con un semplice clic possiamo comodamente leggere in rete [2]. A pagina 97, nella parte superiore, in funzione di n, vengono dati dieci polinomi di grado crescente dal 2° all'11°. Ognuno di questi uguagliante una somma di n potenze di interi successivi con esponente costante pari a 1 nel primo caso fino ad arrivare progressivamente a 10 nell'ultimo. I dieci polinomi non erano un'assoluta novità perché da millenni il problema aveva catturato l'interesse dei matematici. Il primo dei polinomi per calcolare le somme

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}n^2$$

era ben conosciuto dagli antichi greci. I numeri calcolati da questo polinomio al crescere di n sono infatti i numeri triangolari di pitagorica memoria. Anche il caso successivo

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{3}n^3$$

che è la somma di quadrati degli interi, si trova dimostrato in un opera di Archimede (287-212 a.C.) Il terzo polinomio, che è anche il quadrato del primo, oltre che la somma dei cubi degli interi successivi è l'oggetto del teorema di Nicomaco di Gerasa (60-120 circa) [10].

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{1}{4}n^2+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^4.$$

Anche i restanti polinomi elencati erano quindi già stati individuati dai matematici. Nel 1634 Pascal, per esempio, aveva trovato un'identità in cui compariva tutta la serie di queste somme di potenze fino al grado desiderato. Per cui per trovare l'm-esimo polinomio della serie basta sostituire tutti i precedenti e fare i calcoli necessari. La novità invece era nella seconda metà della pagina che mostrava un nuovo e più semplice modo di procedere per continuare la serie di questi polinomi

Figura 3: pagina 202 Archimede 4/2021

di grado sempre più elevato. La formula generalizzante faceva ricorso alla sequenza di certi particolari numeri che ritroviamo anche nei monomi di primo grado dei polinomi della sequenza. Questi numeri risultati poi molto importanti anche in altri contesti furono chiamati numeri di Bernoulli. La formula che li utilizza invece fu intitolata a John Faulhaber (1580-1635) un vero e proprio virtuoso del problema del calcolo delle somme degli interi successivi a cui lo stesso Bernoulli aveva riconosciuto parte del merito per il suo risultato.

Quel che ancora mancava però era una dimostrazione della regola trovata che sarà data solo più di un secolo dopo da Carl Jacobi (1804-1851) che si giovò dello sviluppo in serie infinita di una particolare funzione generatrice [7].

1.2 UNA NUOVA SOLUZIONE

Oggi, utilizzando le matrici, sconosciute ai tempi di Bernoulli, si può così sintetizzare i primi casi precedentemente considerati:

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} k^0 \\ \sum_{k=1}^{n} k^1 \\ \sum_{k=1}^{n} k^2 \\ \sum_{k=1}^{n} k^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2 \\ \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3 \\ \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^4 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Notare che per completezza è stata aggiunta una prima riga corrispondente al caso, forse giudicato banale da Bernoulli, in cui l'esponente degli interi successivi è zero. Gli esempi mostrano che i termini noti dei polinomi sono sempre nulli in corrispondenza al fatto che zero addendi, cioè n=0, deve dare risultato 0. Partendo dal prodotto della matrice quadrata per il vettore di potenze, ricordando che il prodotto righe per colonne consiste nel moltiplicare gli elementi corrispondenti per poi sommare i risultati, si estraggono facilmente i singoli polinomi:

$$\sum_{k=1}^{n} k^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \end{bmatrix} = n \; ; \quad \sum_{k=1}^{n} k^1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2$$

analogamente per le altre righe. Dunque, a questo punto, la matrice triangolare inferiore contenente i coefficienti dei primi 4 polinomi calcolanti somme di potenze con esponenti crescenti da 0 a 3, è di ordine 4 cioè di 4 righe e 4 colonne (4 per 4). Osservando bene la matrice ci si accorge che essa contiene al suo interno, tra i cosiddetti

Figura 4: pagina 203 Archimede 4/2021

minori, anche le matrici analoghe precedenti di ordine 1, 2 e 3. Ogni volta per ottenere la successiva si aggiunge uno gnomone ([1]) composto da una riga orizzontale e una colonna verticale per un totale di $2m + 1$ nuovi elementi formanti la matrice quadrata successiva. Lo gnomone nella parte verticale, eccettuato l'ultimo termine, è composto di zeri mentre in quella orizzontale ci sono i coefficienti del nuovo polinomio che prosegue la serie. Si nota che ogni volta i polinomi passano al grado successivo e di conseguenza i loro coefficienti aumentano di un'unità. Ammettiamo, non potendolo ancora dimostrare, che questa corrispondenza tra somme di potenze e particolari polinomi che le calcolano, continui ad esserci anche nei prossimi casi. Passando da un caso al successivo il problema è prevedere il nuovo polinomio e quindi la nuova riga nella nuova matrice dei coefficienti. Quali sarannno i numeri costituenti la quinta riga nella matrice di ordine 5? Li possiamo prevedere mediante un'attenta osservazione delle righe precedenti? Potreste provare voi stessi, come fece l'autore nella sua ormai lontana gioventù, a indovinarli cercando di scovare regolarità nascoste per poi verificare la correttezza delle vostre eventuali previsioni. Per questo potreste coprire con un foglio gli undici polinomi riportati nell'esempio (E:1) per poi scoprirli a scopo di verifica dopo ogni tentativo di previsione.

Esempio 1 Somma di potenze di interi successivi. Estendo la (1) a 11 polinomi (Matrice $G_{1,1}$ di ordine 11):

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} k^0 \\ \sum_{k=1}^{n} k^1 \\ \sum_{k=1}^{n} k^2 \\ \sum_{k=1}^{n} k^3 \\ \sum_{k=1}^{n} k^4 \\ \sum_{k=1}^{n} k^5 \\ \sum_{k=1}^{n} k^6 \\ \sum_{k=1}^{n} k^7 \\ \sum_{k=1}^{n} k^8 \\ \sum_{k=1}^{n} k^9 \\ \sum_{k=1}^{n} k^{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{30} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{12} & 0 & \frac{5}{12} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{42} & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & 0 & -\frac{7}{24} & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{30} & 0 & \frac{2}{9} & 0 & -\frac{7}{15} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{20} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{7}{10} & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{5}{66} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \\ n^5 \\ n^6 \\ n^7 \\ n^8 \\ n^9 \\ n^{10} \\ n^{11} \end{bmatrix}$$

Applica: P4

([1]) Qui il termine gnomone è usato nell'accezione di Erone di Alessandria cioè come figura che aggiunta alla precedente ne produce una simile.

Figura 5: pagina 204 Archimede 4/2021

Così facendo vi accorgerete che il gioco è solo in parte semplice perché palesi regolarità si mescolano a comportamenti apparentemente caotici. Così è anche per la prima colonna che contiene proprio quei numeri particolarissimi che permisero a Bernoulli di portare alla luce quella regola nascosta che aveva resistito all'indagine di generazioni di valenti matematici. Matrici come quelle mostrate, all'aumentare del loro ordine m, aumentano il numero di righe e quindi dei coefficienti dei polinomi di grado crescente da 1 a m calcolanti le somme di potenze. Le indicheremo con $G_{1,1}$; indipendentemente dall'ordine che sarà chiaro dal contesto, i due parametri indicano la particolare progressione aritmetica considerata, quella degli interi successivi, che hanno come primo termine 1 e come comune differenza, detta anche ragione, 1.

In questa introduzione l'autore presenta una sua formula per arrivare, fissato l'ordine $m > 0$ della matrice, alla determinazione di $G_{h,p}$ e quindi dei primi m polinomi calcolanti le somme delle potenze con esponente intero non negativo che hanno per base i termini successivi di una progressione aritmetica $h+kp$ con primo termine h e ragione $p \neq 0$. La formula qui presentata verrà dimostrata nel resto di questo articolo. Eccola dunque per matrici del quarto ordine:

$$G_{h,p} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ h & p & 0 & 0 \\ h^2 & 2hp & p^2 & 0 \\ h^3 & 3h^2p & 3hp^2 & p^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \end{bmatrix}^{-1}$$

Questa formula, data per il caso $m = 4$, 4 righe per 4 colonne, può senza difficoltà essere estesa a qualsiasi altro ordine. Infatti le righe successive sono facilmente prevedibili per chi ha familiarità con le potenze del binomio e con il triangolo di Tartaglia. Naturalmente per poter utilizzare e dimostrare questa formula è anche necessario conoscere elementi di algebra delle matrici come il calcolo della inversa e il prodotto righe per colonne. Tutti argomenti alla portata di uno studente delle nostre scuole medie superiori. Non è necessaria invece la conoscenza dei numeri di Bernoulli a cui pure si è accennato.

A questo punto si potrebbe verificare che nel caso particolare $h = 1, p = 1$, da cui siamo partiti, la formula presentata dà la matrice già vista. Si lascia al lettore il compito facoltativo di fare questa e altre verifiche. Qui invece possiamo vedere la formula applicata per risolvere il caso delle somme di potenze di dispari successivi (E:7).

1.3 UN PO' DI STORIA RECENTE

Nel 1982 A.W.F. Edwards pubblica un articolo [4] in cui, partendo da un'identità usata da Pascal nel 1654 [5] per risolvere ricorsivamente il problema della somma

Figura 6: pagina 205 Archimede 4/2021

delle potenze di interi successivi, mostra che i coefficienti dei polinomi risolventi il problema si possono trovare invertendo una matrice facilmente ottenibile dal triangolo di Tartaglia.

Verso il 1990 l'autore scopre casualmente la stessa relazione mentre prepara una esercitazione sulle matrici per i suoi alunni di scuola media superiore [8]. Dopo circa quindici anni, andato in pensione e non essendo ancora riuscito a trovare quell'argomento in qualche pubblicazione, prova a dimostrare quanto scoperto. Ci riesce e pubblica dimostrazioni e storia della scoperta sul web [8]. Nel 2017 dopo circa un decennio senza novità, l'autore torna a interessarsi al problema decidendo di intraprendere una strada alternativa a quella analitica storicamente tracciata da Carl Jacobi. Così inizia a dimostrare formule per potenze di interi successivi e proprietà dei numeri e dei polinomi di Bernoulli utilizzando le matrici invece della consueta analisi matematica. Lo stesso anno viene a conoscenza dei lavori di Edwards [5] e pubblica alcuni risultati del percorso intrapreso sul web in lingua inglese [9] catturando l'interesse di alcuni ricercatori [3]. Questo articolo è uno dei frutti di questa ricerca.

2. DEFINIZIONI

2.1 VETTORI

Definizione 1 Vettori di Vandermonde
Sia $\vec{V}(j)$ il vettore con m componenti così definito:

$$\left[\vec{V}(j)\right]_r = \begin{cases} 1 & se\ r=1 \\ j^{r-1} & se\ r=2,3,\ldots m \end{cases} \qquad r,m \in \mathbb{N}^+ \quad j \in \mathbb{C}$$

È applicata in: E:2,3; D: 2; P:1,2,3,4

Esempio 2 Vettori di Vandermonde con m=6 componenti

$$\vec{V}(j) = \begin{bmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \\ j^3 \\ j^4 \\ j^5 \end{bmatrix} \qquad j\vec{V}(j) = \begin{bmatrix} j \\ j^2 \\ j^3 \\ j^4 \\ j^5 \\ j^6 \end{bmatrix} \qquad \vec{V}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Applica: D:1

Figura 7: pagina 206 Archimede 4/2021

Definizione 2 Somme di vettori di Vandermonde in progressione aritmetica
Vettore con m componenti: $n \in \mathbb{N}^+ \quad h, p \in \mathbb{C}$

$$\vec{S}_{h,p}(n) = \vec{V}(h) + \vec{V}(h+p) + \vec{V}(h+2p) + \ldots + \vec{V}(h+(n-1)p) = \sum_{k=0}^{n-1} \vec{V}(h+pk)$$

Dato che sommando i vettori si sommano le componenti si ha:

$$\left[\vec{S}_{h,p}(n)\right]_r = \sum_{k=0}^{n-1} (h+pk)^{r-1} \quad con\ r = 1 \ldots m$$

Applica: D:1 È applicata in: E:3,6; P:2,4

Note

- Le somme di potenze sono state definite come somme di vettori di Vandermonde. Siccome la prima componente non è j^0 ma 1, quando $j = 0$, i risultati saranno come se 0^0 fosse 1 e non forma indeterminata. Ciononostante per evitare infruttuose complicazioni anche in questo caso limite sarà mantenuta la normale notazione usata per la potenza. Per esempio scriveremo $\sum_{k=0}^{n-1} k^0 = n$ anche se a rigore il primo addendo 0^0 non lo permetterebbe.
- Si noti che solo se h è un numero intero $\sum_{k=0}^{n-1} \vec{V}(h+k) = \sum_{k=h}^{h+n-1} \vec{V}(k)$

Esempio 3 Somme di vettori di Vandermonde con m=6 componenti

$$\vec{S}_{h,p}(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \vec{V}(h+kp) = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{n-1} (h+kp)^0 \\ \sum_{k=0}^{n-1} (h+kp)^1 \\ \sum_{k=0}^{n-1} (h+kp)^2 \\ \sum_{k=0}^{n-1} (h+kp)^3 \\ \sum_{k=0}^{n-1} (h+kp)^4 \\ \sum_{k=0}^{n-1} (h+kp)^5 \end{bmatrix}$$

Applica: D:1,2

2.2 MATRICI LEGATE AL TRIANGOLO DI TARTAGLIA

Definizione 3 Matrice T. Triangolo di Tartaglia completo

$$[T]_{r,c} = \begin{cases} 0 & se\ c > r \\ \binom{r-1}{c-1} & se\ c \le r \end{cases}, \ (r = 1 \ldots m; c = 1 \ldots m)$$

È applicata in: E:4,5

Figura 8: pagina 207 Archimede 4/2021

Definizione 4 Matrice A. Triangolo senza ultimo elemento di riga

$$[A]_{r,c} = \begin{cases} 0 & se\ c > r \\ \binom{r}{c-1} & se\ c \le r \end{cases}$$

È applicata in: E:4; P:1,2,4

Esempio 4 Matrici T, A di ordine m=6

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 0 \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 \end{bmatrix}$$

Applica: D:3,4

Definizione 5 T(h,p) Matrici funzioni di due variabili

$$[T(h,p)]_{r,c} = \begin{cases} 0 & se\ c > r \\ \binom{r-1}{c-1} h^{r-c} p^{c-1} & se\ c \le r \end{cases}$$

È applicata in: E:5 P:3,4

Esempio 5 Matrici T(h,p) di ordine m=6

$$T(h,p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h & p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h^2 & 2hp & p^2 & 0 & 0 & 0 \\ h^3 & 3h^2p & 3hp^2 & p^3 & 0 & 0 \\ h^4 & 4h^3p & 6h^2p^2 & 4hp^3 & p^4 & 0 \\ h^5 & 5h^4p & 10h^3p^2 & 10h^2p^3 & 5hp^4 & p^5 \end{bmatrix}$$

Casi particolari: $T(1,1) = T \quad T(0,1) = U$ *elemento neutro*
Applica: D:3,5

3. PROPOSIZIONI

Proposizione 1 Identità G0

$$A\vec{V}(k) = (1+k)\vec{V}(1+k) - k\vec{V}(k)$$

Applica: D:1,4 È applicata in: P:2

Figura 9: pagina 208 Archimede 4/2021

Iniziamo con una dimostrazione didattica prendendo in considerazione identità elementari come: $(1+k)^2 - k^2 = 1 + 2k + k^2 - k^2 = 1 + 2k$. Esprimiamo quindi i primi casi analoghi con l'aiuto di matrici:

$$\begin{bmatrix} (1+k) \\ (1+k)^2 \\ (1+k)^3 \\ (1+k)^4 \\ (1+k)^5 \\ (1+k)^6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k \\ k^2 \\ k^3 \\ k^4 \\ k^5 \\ k^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+k)-k \\ (1+k)^2-k^2 \\ (1+k)^3-k^3 \\ (1+k)^4-k^4 \\ (1+k)^5-k^5 \\ (1+k)^6-k^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+2k \\ 1+3k+3k^2 \\ 1+4k+6k^2+4k^3 \\ 1+5k+10k^2+10k^3+5k^4 \\ 1+6k+15k^2+20k^3+15k^4+6k^5 \end{bmatrix}$$

Queste quattro matrici hanno una sola colonna e sono quindi vettori. Per la D:1 il primo corrisponde a $(1+k)\vec{V}(1+k)$ il secondo a $k\vec{V}(k)$. Il terzo è il risultato della sottrazione tra i primi due. Infine il quarto, uguale al terzo, è composto da polinomi di grado da 0 a 5 ottenuti sviluppando le potenze dei binomi e semplificando successivamente il termine di maggior grado. Questa quarta matrice può esprimersi come prodotto tra la matrice quadrata dei coefficienti e il vettore di potenze:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 0 \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ k \\ k^2 \\ k^3 \\ k^4 \\ k^5 \end{bmatrix} = A\vec{V}(k)$$

Abbiamo così dimostrato l'identità $A\vec{V}(k) = (1+k)\vec{V}(1+k) - k\vec{V}(k)$ nel caso di $m = 6$ componenti. La dimostrazione si estende facilmente per analogia a qualsiasi numero di componenti. Questo potrebbe bastare ma vogliamo ora mostrare come una dimostrazione tecnica che non si avvale di esempi chiarificatori possa nascondere ai meno esperti la semplicità appena evidenziata.

Tenendo conto che per la triangolarità della matrice risulta $[A]_{r,j} = 0$ se $j > r$, moltiplicando riga per colonna, si ha:

$$\sum_{j=1}^{m} [A]_{r,j} [\vec{V}(k)]_j = \sum_{j=1}^{r} \binom{r}{j-1} k^{j-1} = -k^r + \sum_{j=1}^{r+1} \binom{r}{j-1} k^{j-1} = (k+1)^r - k^r =$$
$$= [(k+1)\vec{V}(k+1)]_r - [k\vec{V}(k)]_r \qquad \text{c.v.d.}$$

3.1 TEOREMA G ZERO

Proposizione 2 Teorema G0. *Risolve il problema della somma di potenze di interi successivi inizianti da 0.*

$$\vec{S}_{0,1}(n) = A^{-1} n \vec{V}(n)$$

Applica: D:1,2,4; P:1 È applicata in: E:6; P:4

Figura 10: pagina 209 Archimede 4/2021

Continuiamo con l'esempio. Possiamo ripetere 6 volte l'identità dimostrata scrivendo:

$$A\vec{V}(0) = 1\vec{V}(1) - 0\vec{V}(0)$$
$$A\vec{V}(1) = 2\vec{V}(2) - 1\vec{V}(1)$$
$$A\vec{V}(2) = 3\vec{V}(3) - 2\vec{V}(2)$$
$$A\vec{V}(3) = 4\vec{V}(4) - 3\vec{V}(3)$$
$$A\vec{V}(4) = 5\vec{V}(5) - 4\vec{V}(4)$$
$$A\vec{V}(5) = 6\vec{V}(6) - 5\vec{V}(5)$$

Sommando ora membro a membro otteniamo:

$$A\vec{V}(0) + A\vec{V}(1) + A\vec{V}(2) + A\vec{V}(3) + A\vec{V}(4) + A\vec{V}(5) = 1\vec{V}(1) - 0\vec{V}(0) + 2\vec{V}(2) - 1\vec{V}(1) + \\ + 3\vec{V}(3) - 2\vec{V}(2) + 4\vec{V}(4) - 3\vec{V}(3) + 5\vec{V}(5) - 4\vec{V}(4) + 6\vec{V}(6) - 5\vec{V}(5)$$

Nel primo membro si evidenzia la matrice A, fattore comune, ottenendo:

$$A(\vec{V}(0) + \vec{V}(1) + \vec{V}(2) + \vec{V}(3) + \vec{V}(4) + \vec{V}(5)) = A\sum_{k=0}^{6-1} \vec{V}(k) = A\vec{S}_{0,1} \qquad \text{(D:2)}$$

al secondo membro invece nella somma cosiddetta telescopica si annullano a due a due quasi tutti i termini tranne quello a coefficiente minore $-0\vec{V}(0)$ che è comunque nullo e quello a coefficiente maggiore $6\vec{V}(6)$. Si ottiene quindi nel caso delle sei componenti: $A\vec{S}_{0,1}(6) = 6\vec{V}(6)$ che si può risolvere rispetto al vettore somma in modo analogo a quello di una semplice equazione di primo grado purché la si risolva usando il concetto di inverso, di elemento neutro e i principi di equivalenza delle equazioni. È anche necessario considerare la non commutatività dell'algebra delle matrici. Ecco dunque come procedere in generale.

Addizionando membro a membro, cominciando da 0, i primi n casi particolari della P:1 si ottiene:

$$\sum_{k=0}^{n-1} A\vec{V}(k) = \sum_{k=0}^{n-1} \big((1+k)\vec{V}(1+k) - k\vec{V}(k)\big)$$

sviluppando la somma al secondo membro quasi tutti i termini, eccetto il primo e l'ultimo, si semplificano, a due a due, con gli opposti (effetto telescopico). Raccogliendo poi a fattor comune la matrice del primo membro si ottiene:

$$A\sum_{k=0}^{n-1} \vec{V}(k) = n\vec{V}(n) - 0\vec{V}(0)$$

omettendo il vettore sottratto che è nullo e sostituendo la sommatoria dei vettori con il simbolo inizialmente definito, si ottiene:

$$A\vec{S}_{0,1}(n) = n\vec{V}(n)$$

Figura 11: pagina 210 Archimede 4/2021

infine per esplicitare $\vec{S}_{0,1}(n)$, entrambi i membri dell'equazione a sinistra si moltiplicano per A^{-1} (esistente perché la matrice triangolare ha determinante uguale a m! ≠ 0) ottenendo $\vec{S}_{0,1}(n) = A^{-1} n \vec{V}(n)$ c.v.d.

Esempio 6 Teorema G0, m=7. Particolarizzando $\vec{S}_{0,1}(n) = A^{-1} n \vec{V}(n)$ ed eseguendo il prodotto righe per colonna:

$$\vec{S}_{0,1}(n) = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{n-1} k^0 \\ \sum_{k=0}^{n-1} k^1 \\ \sum_{k=0}^{n-1} k^2 \\ \sum_{k=0}^{n-1} k^3 \\ \sum_{k=0}^{n-1} k^4 \\ \sum_{k=0}^{n-1} k^5 \\ \sum_{k=0}^{n-1} k^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 0 \\ 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \\ n^5 \\ n^6 \\ n^7 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{30} & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{12} & 0 & \frac{5}{12} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{42} & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \\ n^5 \\ n^6 \\ n^7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ -\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2 \\ \frac{1}{6}n - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3 \\ \frac{1}{4}n^2 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^4 \\ -\frac{1}{30}n + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{5}n^5 \\ -\frac{1}{12}n^2 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{2}n^5 + \frac{1}{6}n^6 \\ \frac{1}{42}n - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{7}n^7 \end{bmatrix}$$

Applica: D:2; P:2

Proposizione 3 Matrici per trasformazione lineare

$$T(h,p)\vec{V}(x) = \vec{V}(h + px)$$

Applica: D:1,5 È applicata: P:4

Anche questa identità dovrebbe risultare molto semplice a chi sa sviluppare la potenza di un binomio. Si consideri per esempio l'identita $h^2 + 2hpx + p^2x^2 = (h + px)^2$. Se questa è chiara altrettanto dovrebbe essere

Figura 12: pagina 211 Archimede 4/2021

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h & p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h^2 & 2hp & p^2 & 0 & 0 & 0 \\ h^3 & 3h^2p & 3hp^2 & p^3 & 0 & 0 \\ h^4 & 4h^3p & 6h^2p^2 & 4hp^3 & p^4 & 0 \\ h^5 & 5h^4p & 10h^3p^2 & 10h^2p^3 & 5hp^4 & p^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ h+px \\ (h+px)^2 \\ (h+px)^3 \\ (h+px)^4 \\ (h+px)^5 \end{bmatrix}$$

Infatti l'esempio del binomio di secondo grado è quel che si ottiene moltiplicando la terza riga della matrice per il vettore di Vandermonde $\vec{V}(x)$. Data l'arbitrarietà della scelta delle $m = 6$ componenti questa dimostrazione potrebbe bastare ma volendo fare a meno di esempi chiarificatori si può dare una dimostrazione più tecnica eseguendo il prodotto righe per colonne $\sum_{k=1}^{m}[T(h,p)]_{r,k}[\vec{V}(x)]_k$: sostituendo secondo le definizioni date e ricordando che, per la triangolarità della matrice, $[T(h,\,p)]_{r,k} = 0$ per $k > r$ si ottiene $\sum_{k=1}^{r}\binom{r-1}{k-1}h^{r-k}p^{k-1}x^{k-1} = \sum_{k=1}^{r}\binom{r-1}{k-1}h^{r-k}(px)^{k-1} = (h+px)^{r-1} = [\vec{V}(h+px)]_r$ c.v.d.

3.2 TEOREMA G

Proposizione 4 Teorema G

$$\vec{S}_{h,p}(n) = T(h,p)A^{-1}\,n\vec{V}(n)$$

Applica: D:1,2,4,5; P:2,3 È applicata in: E:1,7

L'enunciato di questa proposizione si ottiene da $\vec{S}_{0,1}(n) = A^{-1}\,n\vec{V}(n)$ (P:2) moltiplicando i due membri a sinistra per la matrice $T\,(h,p)$. Infatti:

$$T(h,p)\vec{S}_{0,1}(n) = T(h,p)\sum_{k=0}^{n-1}\vec{V}(k) = \sum_{k=0}^{n-1}T(h,p)\vec{V}(k) = \sum_{k=0}^{n-1}\vec{V}(h+pk) = \vec{S}_{h,p}(n) \text{ c.v.d.}$$

Esempio 7 Teorema G: somme di potenze di dispari successivi.
$h = 1, p = 2$, ordine $m = 10$. Per applicare il teorema G si deve considerare:

$$T(1,2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 12 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 24 & 32 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & 40 & 80 & 80 & 32 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 12 & 60 & 160 & 240 & 192 & 64 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 14 & 84 & 280 & 560 & 672 & 448 & 128 & 0 & 0 \\ 1 & 16 & 112 & 448 & 1120 & 1792 & 1792 & 1024 & 256 & 0 \\ 1 & 18 & 144 & 672 & 2016 & 4032 & 5376 & 4608 & 2304 & 512 \end{bmatrix}$$

Figura 13: pagina 212 Archimede 4/2021

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\1&2&0&0&0&0&0&0&0&0\\1&3&3&0&0&0&0&0&0&0\\1&4&6&4&0&0&0&0&0&0\\1&5&10&10&5&0&0&0&0&0\\1&6&15&20&15&6&0&0&0&0\\1&7&21&35&35&21&7&0&0&0\\1&8&28&56&70&56&28&8&0&0\\1&9&36&84&126&126&84&36&9&0\\1&10&45&120&210&252&210&120&45&10\end{bmatrix}^{-1}=$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0\\\frac{1}{6}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{3}&0&0&0&0&0&0&0\\0&\frac{1}{4}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&0&0&0&0&0&0\\-\frac{1}{30}&0&\frac{1}{3}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{5}&0&0&0&0&0\\0&-\frac{1}{12}&0&\frac{5}{12}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{6}&0&0&0&0\\\frac{1}{42}&0&-\frac{1}{6}&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{7}&0&0&0\\0&\frac{1}{12}&0&-\frac{7}{24}&0&\frac{1}{12}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{8}&0&0\\-\frac{1}{30}&0&\frac{2}{9}&0&-\frac{7}{15}&0&\frac{2}{3}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{9}&0\\0&-\frac{3}{20}&0&\frac{1}{2}&0&-\frac{7}{10}&0&\frac{3}{4}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{10}\end{bmatrix}$$

Ottenuta la matrice $G_{1,2}=T(1,2)A^{-1}$ *si ha:*

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\-\frac{1}{3}&0&\frac{4}{3}&0&0&0&0&0&0&0\\0&-1&0&2&0&0&0&0&0&0\\\frac{7}{15}&0&-\frac{8}{3}&0&\frac{16}{5}&0&0&0&0&0\\0&\frac{7}{3}&0&-\frac{20}{3}&0&\frac{16}{3}&0&0&0&0\\-\frac{31}{21}&0&\frac{28}{3}&0&-16&0&\frac{64}{7}&0&0&0\\0&-\frac{31}{3}&0&\frac{98}{3}&0&-\frac{112}{3}&0&16&0&0\\\frac{127}{15}&0&-\frac{496}{9}&0&\frac{1568}{15}&0&-\frac{256}{3}&0&\frac{256}{9}&0\\0&\frac{381}{5}&0&-248&0&\frac{1568}{5}&0&-192&0&\frac{2556}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n\\n^2\\n^3\\n^4\\n^5\\n^6\\n^7\\n^8\\n^9\\n^{10}\end{bmatrix}=$$

Figura 14: pagina 213 Archimede 4/2021

eseguendo il prodotto righe per colonna:

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{n-1}(1+2k)^0 \\ \sum_{k=0}^{n-1}(1+2k)^1 \\ \sum_{k=0}^{n-1}(1+2k)^2 \\ \sum_{k=0}^{n-1}(1+2k)^3 \\ \sum_{k=0}^{n-1}(1+2k)^4 \\ \sum_{k=0}^{n-1}(1+2k)^5 \\ \sum_{k=0}^{n-1}(1+2k)^6 \\ \sum_{k=0}^{n-1}(1+2k)^7 \\ \sum_{k=0}^{n-1}(1+2k)^8 \\ \sum_{k=0}^{n-1}(1+2k)^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n^2 \\ -\frac{1}{3}n+\frac{4}{3}n^3 \\ -n^2+2n^4 \\ \frac{7}{15}n-\frac{8}{3}n^3+\frac{16}{5}n^5 \\ \frac{7}{3}n^2-\frac{20}{3}n^4+\frac{16}{3}n^6 \\ -\frac{31}{21}n+\frac{28}{3}n^3-16n^5+\frac{64}{7}n^7 \\ -\frac{31}{3}n^2+\frac{98}{3}n^4-\frac{112}{3}n^6+16n^8 \\ \frac{127}{15}n-\frac{496}{9}n^3+\frac{1568}{15}n^5-\frac{256}{3}n^7+\frac{256}{9}n^9 \\ \frac{381}{5}n^2-248n^4+\frac{1568}{5}n^6-192n^8+\frac{256}{5}n^{10} \end{bmatrix}$$

Applica: D:4,5; P:4

4. CONCLUSIONE

Corollario 1 Matrici per somme di potenze di una progressione aritmetica $\forall h \in \mathbb{C},\ \forall p \neq 0 \in \mathbb{C},\ \forall m > 1 \in \mathbb{N}\ \ \exists\, G_{h,p} \in \mathbb{C}^{m^2}$ *tale che:*

$$\sum_{k=0}^{n-1}(h+kp)^{m-1} = \sum_{k=1}^{m}[G_{h,p}]_{m,k}n^k$$

Infatti per il teorema G esiste la matrice triangolare inferiore $G_{h,p} = T(h,p)A^{-1}$ di ordine m la cui ultima riga moltiplicata per la matrice di m righe per 1 colonna $n\vec{V}(n)$ dà un polinomio pari alla somma di n potenze con esponente costante $m-1$ e basi successive in progressione aritmetica con primo termine h e ragione p.

Applica: D:1,2,4,5; P4

Giorgio Pietrocola
giorgio.pietrocola@gmail.com

Figura 15: pagina 214 Archimede 4/2021

Riferimenti bibliografici

[1] Bazso and Mezo, *On the coefficients of power sums of arithmetic progressions*, Journal of Number Theory, 2015.
[2] Jacob Bernoulli, *Summae potestatum in Artis conjectandi*, Internet Archive, p. 97, 1713.
[3] Nigel Derby, *The continued search of sums of powers*, The Mathematical Gazette, 2019.
[4] A.W.F. Edwards, *Sums of powers of integers*, Mathematical Gazette 66, 1982.
[5] A.W.F. Edwards, *Pascal's arhitmetical triangle.The story of a mathematical idea*, pp. 82-84, The Johns University, 1987.
[6] Gottfried Helms, *Accessing Bernoulli-Numbers by Matrix-Operations*, 2006.
[7] Carl Jacobi, *De usu legitimo formulae summatoriae Maclaurinianae*. Journal für die reine und angewandte Mathematik. 12. pp. 263-72, 1834.
[8] Giorgio Pietrocola, *Esplorando un antico sentiero: teoremi sulle somme di potenze di interi successivi*, Maecla, 1° parte 2008; 2° parte 2019.
[9] Giorgio Pietrocola, *On polynomials for the calculation of sums of powers of successive integers and Bernoulli numbers deduced from Pascal's arithmetical triangle*.www.pietrocola.eu, 2017.
[10] *Sum of power of positive integer MMA*, Mathematical association of America MMA.

Figura 16: pagina 215 Archimede 4/2021