Dai teoremi gemelli sulle matrici ricavabili dal triangolo di Tartaglia alla soluzione generale del problema delle somme di interi successivi

di Giorgio Pietrocola, Maggio 2019

Nella prima parte due dimostrazioni sul modo di ottenere polinomi corrispondenti alla somma di potenze di interi successivi: il teorema "1A" per somme da *1* a *n*, il teorema "1B" per somme da *0* a *n-1.*

Nella seconda parte, più in generale, si dimostra il teorema "1C" per somme da *h* a *h+n-1*
con h numero qualsiasi, reale o complesso

Avvertenza:
Per motivi esclusivamente esemplificativi i vettori verranno rappresentati con sei componenti (m=6) e le matrici quadrate saranno di 6 righe e sei colonne. Nel simbolismo adottato il numero m di componenti non viene specificato perchè m può essere un qualsiasi numero intero positivo che si è liberi di fissare a piacere.
Notazione adottata:

Prima parte: I teoremi gemelli

1.1) Teorema "1A"

Sui polinomi corrispondenti alla somma di potenze di interi successivi da *1* a *n*

Notazione:

$$\vec{V}(i) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ i^2 \\ i^3 \\ i^4 \\ i^5 \end{pmatrix} \quad i\vec{V}(i) = \begin{pmatrix} i \\ i^2 \\ i^3 \\ i^4 \\ i^5 \\ i^6 \end{pmatrix} \quad \sum_{i=1}^{n} \vec{V}(i) = \vec{S}_1(n) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} i^0 \\ \sum_{i=1}^{n} i^1 \\ \sum_{i=1}^{n} i^2 \\ \sum_{i=1}^{n} i^3 \\ \sum_{i=1}^{n} i^4 \\ \sum_{i=1}^{n} i^5 \end{pmatrix}$$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -6 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 10 & -10 & 5 & 0 \\ -1 & 6 & -15 & 20 & -15 & 6 \end{pmatrix}$$

Partiamo dalla seguente identità derivante dallo sviluppo della potenza del binomio:

$$\begin{pmatrix} i-(i-1) \\ i^2-(i-1)^2 \\ i^3-(i-1)^3 \\ i^4-(i-1)^4 \\ i^5-(i-1)^5 \\ i^6-(i-1)^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1+2i \\ 1-3i+3i^2 \\ -1+4i-6i^2+4i^3 \\ 1-5i+10i^2-10i^3+5i^4 \\ -1+6i-15i^2+20i^3-15i^4+6i^5 \end{pmatrix}$$

Utilizzando i vettori definiti all'inizio e tenendo conto del prodotto righe per colonna la precedente diventa:

$$\begin{pmatrix} i \\ i^2 \\ i^3 \\ i^4 \\ i^5 \\ i^6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (i-1) \\ (i-1)^2 \\ (i-1)^3 \\ (i-1)^4 \\ (i-1)^5 \\ (i-1)^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -6 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 10 & -10 & 5 & 0 \\ -1 & 6 & -15 & 20 & -15 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ i^2 \\ i^3 \\ i^4 \\ i^5 \end{pmatrix}$$

indicando la matrice a segni alternati, facilmente ricavabile dal triangolo di Tartaglia, come indicato all'inizio, possiamo sintetizzare l'identità scrivendo:

$$i\vec{V}(i) - (i-1)\vec{V}(i-1) = \overline{A}\vec{V}(i)$$

sommando membro a membro per *i* variabile da *1* a *n* si ottiene:

$$\sum_{i=1}^{n}(i\vec{V}(i) - (i-1)\vec{V}(i-1)) = \sum_{i=1}^{n}\overline{A}\vec{V}(i)$$

Sviluppando la somma al primo membro si semplificano a due a due quasi tutti i termini tranne il primo e l'ultimo (effetto telescopico) e raccogliendo la matrice fattore comune al secondo membro si ottiene:

$$n\vec{V}(n) - (0)\vec{V}(0) = \overline{A}\sum_{i=1}^{n}\vec{V}(i)$$

Omettendo il vettore sottratto a componenti nulle e sostituendo la somma di vettori con il vettore inizialmente definito si ottiene:

$$n\vec{V}(n) = \overline{A}\vec{S}_1(n)$$

infine per esplicitare il vettore S si moltiplicano ambo i membri dell'equazione a sinistra per la matrice inversa di A segnata (esistente perché inversa di una matrice triangolare con determinante m!, prodotto non nullo della diagonale principale):

$$\boxed{\vec{S}_1(n) = \overline{A}^{-1} n\vec{V}(n)}$$

che risolve il problema tradizionale della somma di potenze di interi successivi

Esempio nel caso di sette componenti (m=7):

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} i^0 \\ \sum_{i=1}^{n} i^1 \\ \sum_{i=1}^{n} i^2 \\ \sum_{i=1}^{n} i^3 \\ \sum_{i=1}^{n} i^4 \\ \sum_{i=1}^{n} i^5 \\ \sum_{i=1}^{n} i^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -6 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 10 & -10 & 5 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & -15 & 20 & -15 & 6 & 0 \\ 1 & -7 & 21 & -35 & 35 & -21 & 7 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \\ n^5 \\ n^6 \\ n^7 \end{pmatrix}$$

Esempio nel caso undici componenti (m=11):

$$
\begin{pmatrix}
\sum_{i=1}^{n} i^0 \\
\sum_{i=1}^{n} i^1 \\
\sum_{i=1}^{n} i^2 \\
\sum_{i=1}^{n} i^3 \\
\sum_{i=1}^{n} i^4 \\
\sum_{i=1}^{n} i^5 \\
\sum_{i=1}^{n} i^6 \\
\sum_{i=1}^{n} i^7 \\
\sum_{i=1}^{n} i^8 \\
\sum_{i=1}^{n} i^9 \\
\sum_{i=1}^{n} i^{10}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{30} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{1}{12} & 0 & \frac{5}{12} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{42} & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{12} & 0 & -\frac{7}{24} & 0 & \frac{7}{12} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{30} & 0 & \frac{2}{9} & 0 & -\frac{7}{15} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\
0 & -\frac{3}{20} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{7}{10} & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} & 0 \\
\frac{5}{66} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{11}
\end{pmatrix}
*
\begin{pmatrix}
n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \\ n^5 \\ n^6 \\ n^7 \\ n^8 \\ n^9 \\ n^{10} \\ n^{11}
\end{pmatrix}
$$

ossia eseguendo il prodotto righe per colonna:

$$\sum_{i=1}^{n} i^0 = n$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^1 = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^4$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = -\frac{1}{30}n + \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{5}n^5$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^5 = -\frac{1}{12}n^2 + \frac{5}{12}n^4 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{1}{6}n^6$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^6 = \frac{1}{42}n - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{7}n^7$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^7 = \frac{1}{12}n^2 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{7}{12}n^6 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{1}{8}n^8$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^8 = -\frac{1}{30}n + \frac{2}{9}n^3 - \frac{7}{15}n^5 + \frac{2}{3}n^7 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{1}{9}n^9$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^9 = -\frac{3}{20}n^2 + \frac{1}{2}n^4 - \frac{7}{10}n^6 + \frac{3}{4}n^8 + \frac{1}{2}n^9 + \frac{1}{10}n^{10}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^{10} = \frac{5}{66}n - \frac{1}{2}n^3 + n^5 - n^7 + \frac{5}{6}n^9 + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{1}{11}n^{11}$$

Questi sono i polinomi che furono pubblicati nel libro Ars Conjectandi di Jacob Bernoulli nel 1713 pochi anni dopo la morte dell'autore.

1.2) Teorema "1B"

Sui polinomi corrispondenti alla somma di potenze di interi successivi da *0* a *n-1*

Notazione adottata (ponendo $0^0=1$):

$$\vec{V}(i)=\begin{pmatrix}1\\ i\\ i^2\\ i^3\\ i^4\\ i^5\end{pmatrix}\qquad i\vec{V}(i)=\begin{pmatrix}i\\ i^2\\ i^3\\ i^4\\ i^5\\ i^6\end{pmatrix}\qquad \sum_{i=0}^{n-1}\vec{V}(i)=\vec{S}_0(n)=\begin{pmatrix}\sum_{i=0}^{n-1} i^0\\ \sum_{i=0}^{n-1} i^1\\ \sum_{i=0}^{n-1} i^2\\ \sum_{i=0}^{n-1} i^3\\ \sum_{i=0}^{n-1} i^4\\ \sum_{i=0}^{n-1} i^5\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\ 1&2&0&0&0&0\\ 1&3&3&0&0&0\\ 1&4&6&4&0&0\\ 1&5&10&10&5&0\\ 1&6&15&20&15&6\end{pmatrix}$$

Partiamo dalla seguente identità tra due vettori derivante dallo sviluppo della potenza del binomio:

$$\begin{pmatrix} (1+i)-i \\ (1+i)^2-i^2 \\ (1+i)^3-i^3 \\ (1+i)^4-i^4 \\ (1+i)^5-i^5 \\ (1+i)^6-i^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+2i \\ 1+3i+3i^2 \\ 1+4i+6i^2+4i^3 \\ 1+5i+10i^2+10i^3+5i^4 \\ 1+6i+15i^2+20i^3+15i^4+6i^5 \end{pmatrix}$$

Utilizzando i vettori definiti all'inizio e tenendo conto del prodotto righe per colonna la precedente diventa:

$$\begin{pmatrix} (1+i) \\ (1+i)^2 \\ (1+i)^3 \\ (1+i)^4 \\ (1+i)^5 \\ (1+i)^6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} i \\ i^2 \\ i^3 \\ i^4 \\ i^5 \\ i^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 0 \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ i^2 \\ i^3 \\ i^4 \\ i^5 \end{pmatrix}$$

indicando con A la matrice ricavabile dal triangolo di Tartaglia escludendo l'ultimo elemento di ciascuna riga, possiamo sintetizzare l'identità scrivendo:

$$(1+i)\vec{V}(1+i) - i\vec{V}(i) = A\vec{V}(i)$$

sommando membro a membro per *i* variabile da *0* a *n-1* si ottiene:

$$\sum_{i=0}^{n-1}((1+i)\vec{V}(1+i)-i\vec{V}(i))=\sum_{i=0}^{n-1}A\vec{V}(i)$$

Sviluppando la somma al primo membro si semplificano a due a due quasi tutti i termini tranne il primo e l'ultimo (effetto telescopico) e raccogliendo la matrice fattore comune al secondo membro si ottiene:

$$n\vec{V}(n)-(0)\vec{V}(0)=A\sum_{i=0}^{n-1}\vec{V}(i)$$

Omettendo il vettore sottratto a componenti nulle e sostituendo la somma di vettori con il vettore inizialmente definito si ottiene:

$$n\vec{V}(n)=A\vec{S}_0(n)$$

infine per esplicitare il vettore S si moltiplicano ambo i membri dell'equazione a sinistra per la matrice inversa di A (esistente perché A è una matrice mxm triangolare con determinante il prodotto della diagonale m!, non nullo):

$$\boxed{\vec{S}_0(n)=A^{-1}n\vec{V}(n)}$$

è così risolto in generale il problema della somma di potenze di interi successivi

Esempio nel caso di m=7 componenti:

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n-1} k^0 \\ \sum_{k=0}^{n-1} k^1 \\ \sum_{k=0}^{n-1} k^2 \\ \sum_{k=0}^{n-1} k^3 \\ \sum_{k=0}^{n-1} k^4 \\ \sum_{k=0}^{n-1} k^5 \\ \sum_{k=0}^{n-1} k^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 0 \\ 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \\ n^5 \\ n^6 \\ n^7 \end{pmatrix}$$

calcolando la matrice inversa:

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n-1} k^0 \\ \sum_{k=0}^{n-1} k^1 \\ \sum_{k=0}^{n-1} k^2 \\ \sum_{k=0}^{n-1} k^3 \\ \sum_{k=0}^{n-1} k^4 \\ \sum_{k=0}^{n-1} k^5 \\ \sum_{k=0}^{n-1} k^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{30} & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{12} & 0 & \frac{5}{12} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{42} & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \\ n^5 \\ n^6 \\ n^7 \end{pmatrix}$$

ossia sviluppando il prodotto righe per colonna:

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^0 = n$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^1 = -\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{1}{6}n - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^3 = \frac{1}{4}n^2 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^4$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^4 = -\frac{1}{30}n + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{5}n^5$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^5 = -\frac{1}{12}n^2 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{2}n^5 + \frac{1}{6}n^6$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^6 = \frac{1}{42}n - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{7}n^7$$

Seconda parte: Ulteriori approfondimenti

2.1) Il gruppo abeliano delle potenze di T

Indicheremo con T la matrice triangolare corrispondente al triangolo di Tartaglia.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Per lo sviluppo della potenza del binomio si ha:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ i^2 \\ i^3 \\ i^4 \\ i^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+i)^0 \\ (1+i)^1 \\ (1+i)^2 \\ (1+i)^3 \\ (1+i)^4 \\ (1+i)^5 \end{pmatrix}$$

che può essere espresso come

$$T\vec{V}(i) = \vec{V}(1+i)$$

dunque la moltiplicazione per T incrementa la base del vettore di potenze di un'unità. Ripetendo l'operazione l'incremento complessivo sarà di 2 unità e quindi, per la proprietà associativa, dovrà essere
T T **V**(i)=T^2**V**(i)=**V**(i+2)

Più in generale:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ h+i \\ h^2+2hi+i^2 \\ h^3+3h^2i+3hi^2+i^3 \\ h^4+4h^3i+6h^2i^2+4hi^3+i^4 \\ h^5+5h^4i+10h^3i^2+10h^2i^3+5hi^4+i^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (h+i)^0 \\ (h+i)^1 \\ (h+i)^2 \\ (h+i)^3 \\ (h+i)^4 \\ (h+i)^5 \end{pmatrix}$$

equivale a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h^2 & 2h & 1 & 0 & 0 & 0 \\ h^3 & 3h^2 & 3h & 1 & 0 & 0 \\ h^4 & 4h^3 & 6h^2 & 4h & 1 & 0 \\ h^5 & 5h^4 & 10h^3 & 10h^2 & 5h & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ i^2 \\ i^3 \\ i^4 \\ i^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (h+i)^0 \\ (h+i)^1 \\ (h+i)^2 \\ (h+i)^3 \\ (h+i)^4 \\ (h+i)^5 \end{pmatrix}$$

esprimibile come:

$$T^h \vec{V}(i) = \vec{V}(h+i)$$

dunque la moltiplicazione per T^h incrementa la base del vettore di potenze di h. Dunque l'insieme delle potenze di T con esponenti non solo interi (ma anche razionali, reali o complessi) con l'operazione di composizione costituiscono un gruppo abeliano isomorfo a quello dell'ordinaria addizione che inducono sulla base dei vettori V per cui si moltiplicano. Facendo riferimento alle somme indotte si constata che

$$T^0 = I \ , \quad T^h T^{-h} = I \ , \quad T^a T^b = T^b T^a = T^{a+b}$$
$$(T^a T^b) T^c = T^a (T^b T^c) = T^{a+b+c}$$

Notare che in questo modo

$$T^h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h^2 & 2h & 1 & 0 & 0 & 0 \\ h^3 & 3h^2 & 3h & 1 & 0 & 0 \\ h^4 & 4h^3 & 6h^2 & 4h & 1 & 0 \\ h^5 & 5h^4 & 10h^3 & 10h^2 & 5h & 1 \end{pmatrix}$$

si può calcolare per esempio T^{10} senza dover ripetere molte volte il prodotto righe per colonne.

2.2) Teorema "1C"

Sui polinomi corrispondenti alla somma di potenze di interi successivi da *h* a *h+n-1*

Estendiamo la notazione già adottata nei due teoremi precedenti:

$$\sum_{i=h}^{h+n-1} \vec{V}(i) = \vec{S}_h(n) = \begin{pmatrix} \sum_{i=h}^{h+n-1} i^0 \\ \sum_{i=h}^{h+n-1} i^1 \\ \sum_{i=h}^{h+n-1} i^2 \\ \sum_{i=h}^{h+n-1} i^3 \\ \sum_{i=h}^{h+n-1} i^4 \\ \sum_{i=h}^{h+n-1} i^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n-1} (h+i)^0 \\ \sum_{i=0}^{n-1} (h+i)^1 \\ \sum_{i=0}^{n-1} (h+i)^2 \\ \sum_{i=0}^{n-1} (h+i)^3 \\ \sum_{i=0}^{n-1} (h+i)^4 \\ \sum_{i=0}^{n-1} (h+i)^5 \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{n-1} \vec{V}(h+i)$$

Per la nostra dimostrazione possiamo partire dal teorema 1B che stabilisce:

$$\vec{S}_0(n) = A^{-1} n \vec{V}(n)$$

moltiplicando i due membri a sinistra per T^h, a primo membro la moltiplicazione si distribuisce agli addendi V(i) che diventano V(h+i) e dunque

$$\boxed{\vec{S}_h(n) = T^h A^{-1} n \vec{V}(n)}$$

da notare, come corollario, che per h=1 risulta

$$\vec{S}_1(n) = TA^{-1}n\vec{V}(n)$$

tenendo presente il teorema 1A risulta dimostrato

che $\overline{A} = TA^{-1}$

Esempio con h=-9 m=4

Calcolando $T^{-9}A^{-1}$:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=-9}^{n-10} i^0 \\ \sum_{i=-9}^{n-10} i^1 \\ \sum_{i=-9}^{n-10} i^2 \\ \sum_{i=-9}^{n-10} i^3 \\ \sum_{i=-9}^{n-10} i^4 \\ \sum_{i=-9}^{n-10} i^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{19}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{541}{6} & -\frac{19}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -855 & \frac{541}{4} & -\frac{19}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{242999}{30} & -1710 & \frac{541}{3} & -\frac{19}{2} & \frac{1}{5} & 0 \\ -76665 & \frac{242999}{12} & -2850 & \frac{2705}{12} & -\frac{19}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \\ n^5 \\ n^6 \end{pmatrix}$$

e in forma equivalente:

$$\sum_{i=-9}^{n-10} i^0 = n$$
$$\sum_{i=-9}^{n-10} i^1 = -\frac{19}{2}n + \frac{1}{2}n^2$$
$$\sum_{i=-9}^{n-10} i^2 = \frac{541}{6}n - \frac{19}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3$$
$$\sum_{i=-9}^{n-10} i^3 = -855n - \frac{541}{4}n^2 - \frac{19}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^4$$
$$\sum_{i=-9}^{n-10} i^4 = \frac{242999}{30}n - 1710n^2 + \frac{541}{3}n^3 - \frac{19}{2}n^4 + \frac{1}{5}n^5$$
$$\sum_{i=-9}^{n-10} i^5 = -76665n + \frac{242999}{12}n^2 - 2850n^3 + \frac{2705}{12}n^4 - \frac{19}{2}n^5 + \frac{1}{6}n^6$$

Esempio con h=e m=4

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n-1}(e+i)^0 \\ \sum_{i=0}^{n-1}(e+i)^1 \\ \sum_{i=0}^{n-1}(e+i)^2 \\ \sum_{i=0}^{n-1}(e+i)^3 \end{pmatrix} = T^e A^{-1} n\vec{V}(n) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ e & 1 & 0 & 0 \\ e^2 & 2e & 1 & 0 \\ e^3 & 3e^2 & 3e & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} n\vec{V}(n) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ (e-\frac{1}{2}) & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ (e^2-e+\frac{1}{6}) & (e-\frac{1}{2}) & \frac{1}{3} & 0 \\ (e^3-\frac{3}{2}e^2+\frac{1}{2}e) & \frac{3}{2}(e^2-e+\frac{1}{6}) & (e-\frac{1}{2}) & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} n \\ (e-\frac{1}{2})n+\frac{1}{2}n^2 \\ (e^2-e+\frac{1}{6})n+(e-\frac{1}{2})n^2+\frac{1}{3}n^3 \\ (e^3-\frac{3}{2}e^2+\frac{1}{2}e)n+\frac{3}{2}(e^2-e+\frac{1}{6})n^2+(e-\frac{1}{2})n^3+\frac{1}{4}n^4 \end{pmatrix}$$

Da notare che le quantità tra parentesi nei polinomi in n sono i polinomi di Bernoulli calcolati in e.

2.3 Infinite sequenze bernoulliane.

Indicando con **B**(h) il vettore corrispondente alla prima colonna di $T^h A^{-1}$ abbiamo per esempio:

$$\vec{B}(-1) = (1, -\frac{3}{2}, \frac{13}{6}, -3, \frac{119}{30}, -5, \frac{253}{42}, -7, \frac{239}{30}, -9, \frac{665}{66}, -11, \frac{32069}{2730}, \dots)$$
$$\vec{B}(0) = (1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{30}, 0, \frac{1}{42}, 0, \frac{1}{30}, 0, \frac{5}{66}, 0, -\frac{691}{2730}, 0, \frac{7}{6}, 0, -\frac{3617}{510}, 0, \dots)$$
$$\vec{B}(1) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{30}, 0, \frac{1}{42}, 0, \frac{1}{30}, 0, \frac{5}{66}, 0, -\frac{691}{2730}, 0, \frac{7}{6}, 0, -\frac{3617}{510}, 0, \dots)$$
$$\vec{B}(2) = (1, \frac{3}{2}, \frac{13}{6}, 3, \frac{119}{30}, 5, \frac{253}{42}, 7, \frac{239}{30}, 9, \frac{665}{66}, 11, \frac{32069}{2730}, 13, \frac{91}{6}, 15, \dots)$$
$$\vec{B}(3) = (1, \frac{5}{2}, \frac{37}{6}, 15, \frac{1079}{30}, 85, \frac{8317}{42}, 455, \frac{30959}{30}, 2313, \frac{338585}{66}, 11275, \dots)$$

dove all'argomento 0 corrispondono gli ordinari numeri di Bernoulli e all'argomento 1 corrisponde la sua variante con unica differenza nel segno del secondo elemento ($B_1=+\frac{1}{2}$)

2.4 Dalla matrice T^hA^{-1} alla ordinaria formula di Faulhaber generalizzata.

La matrice T^hA^{-1} può essere ordinata esprimendola equivalentemente in uno dei due modi seguenti (per le dimostrazioni rimando qui):

$$\begin{pmatrix}
1\frac{1}{1}B_0(h) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1\frac{1}{1}B_1(h) & 1\frac{1}{2}B_0(h) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1\frac{1}{1}B_2(h) & 2\frac{1}{2}B_1(h) & 1\frac{1}{3}B_0(h) & 0 & 0 & 0 \\
1\frac{1}{1}B_3(h) & 3\frac{1}{2}B_2(h) & 3\frac{1}{3}B_1(h) & 1\frac{1}{4}B_0(h) & 0 & 0 \\
1\frac{1}{1}B_4(h) & 4\frac{1}{2}B_3(h) & 6\frac{1}{3}B_2(h) & 4\frac{1}{4}B_1(h) & 1\frac{1}{5}B_0(h) & 0 \\
1\frac{1}{1}B_5(h) & 5\frac{1}{2}B_4(h) & 10\frac{1}{3}B_3(h) & 10\frac{1}{4}B_2(h) & 5\frac{1}{5}B_1(h) & 1\frac{1}{6}B_0(h)
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1\frac{1}{1}B_0(h) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\frac{1}{2}B_1(h) & 1\frac{1}{2}B_0(h) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3\frac{1}{3}B_2(h) & 3\frac{1}{3}B_1(h) & 1\frac{1}{3}B_0(h) & 0 & 0 & 0 \\ 4\frac{1}{4}B_3(h) & 6\frac{1}{4}B_2(h) & 4\frac{1}{4}B_1(h) & 1\frac{1}{4}B_0(h) & 0 & 0 \\ 5\frac{1}{5}B_4(h) & 10\frac{1}{5}B_3(h) & 10\frac{1}{5}B_2(h) & 5\frac{1}{5}B_1(h) & 1\frac{1}{5}B_0(h) & 0 \\ 6\frac{1}{6}B_5(h) & 15\frac{1}{6}B_4(h) & 20\frac{1}{6}B_3(h) & 15\frac{1}{6}B_2(h) & 6\frac{1}{6}B_1(h) & 1\frac{1}{6}B_0(h) \end{pmatrix}$$

dalla prima, generalizzando, si ricava:

$$\sum_{j=0}^{n-1}(j+h)^m = \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}\binom{m-1}{k-1}B_{m-k}(h)n^k$$

dalla seconda:

$$\sum_{j=0}^{n-1}(j+h)^m = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k}B_k(h)n^{m+1-k}$$

dove $B_k(h)$ sono i polinomi di Bernoulli in funzione di h corrispondenti alla prima colonna della matrice.
$B_k(0)=B_k$ sono gli ordinari numeri di Bernoulli, $B_k(1)=B_k^+$ sono i numeri di Bernoulli nella variante con $B_1=+\frac{1}{2}$
Particolarizzata per j=1 la seconda di queste equazioni è la formule detta di Faulhaber .