Didattica per una nuova formula

Giorgio Pietrocola
giorgio.pietrocola[at]gmail.com
www.pietrocola.eu

30 dicembre 2023

1 Formula che generalizza il problema della somma di potenze di interi successivi.

Presentatore Buongiorno a tutti, e grazie per aver accolto l'invito alla presentazione di questa formula che risolve, generalizzandolo, un problema classico. In questa fase introduttiva non ci saranno dimostrazioni ma solo spiegazioni e verifiche. Siccome non tutti conoscono il problema della somma di potenze di interi successivi, inizieremo ricordando questo problema che ha catturato l'interesse di illustri matematici per secoli. Tutto iniziò con la scoperta di alcuni polinomi con la proprietà sorprendente di calcolare somme di interi successivi elevati ad un esponente costante, intero non negativo. Ecco in notazione moderna i primi cinque polinomi di una serie infinita seguente la successione dei numeri naturali:

$$\begin{bmatrix} 1^0 + 2^0 + ...n^0 \\ 1^1 + 2^1 + ...n^1 \\ 1^2 + 2^2 + ...n^2 \\ 1^3 + 2^3 + ...n^3 \\ 1^4 + 2^4 + ...n^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2 \\ \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3 \\ \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^4 \\ -\frac{1}{30}n + \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{5}n^5 \end{bmatrix}$$

L'uguaglianza dei vettori implica quello delle rispettive componenti. Indicheremo questi polinomi con $P_1(n), P_2(n), P_3(n), P_4(n), P_5(n)$ dove l'indice progressivo indica sia l'elemento della successione sia il grado del polinomio. Tale indice supera di un unità l'esponente degli n addendi. Il primo caso, $P_1(n) = n$, che a noi può apparire il più semplice, è invece il più recente perché lo zero, come numero e come esponente, per lungo tempo non è stato considerato. Il secondo caso $P_2(n) = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2$ risale ai pitagorici e ai loro

numeri triangolari ma non era considerato caso particolare della somma di potenze di interi successivi perché 1 non era concepito come esponente. Il terzo, $P_3(n) = \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3$, fu dimostrato per via geometrica da Archimede. Il quarto, $P_4(n) = \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^4$, lo troviamo nel bel teorema di Nicomaco di Gerasa in cui si dimostra che $P_4(n) = (P_2(n))^2$.
Verifichiamo ora, in alcuni casi particolari, la proprietà di questi polinomi calcolanti la somma di n addendi aventi per base gli interi successivi e per esponente una costante inferiore di un unità al grado del relativo polinomio. $P_2(4) = \frac{1}{2}4 + \frac{1}{2}16 = 2 + 8 = 10$ come la somma di quattro addendi con esponente 1 è $1+2+3+4 = 10$. Analogamente $P_4(5) = \frac{1}{4}25 + \frac{1}{2}125 + \frac{1}{4}625 = \frac{900}{4} = 225$, stesso risultato della somma di 5 addendi interi successivi con esponente 3: $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 225$ E' chiara la particolarità di questi polinomi o devo continuare con le verifiche?
Prof.M.B. Mi sembra tutto chiaro, considerando che questa presentazione prescinde dalle dimostrazioni. Ho un paio di domande. Perché i monomi dei vari polinomi sono presentati in ordine di grado crescente e non decrescente come in genere si preferisce fare? Perché sono stati usati i vettori?
Presentatore Abbiamo usato i vettori per avvicinarci alla formula da presentare. I nostri polinomi conviene esprimerli come prodotto, righe per colonna, di una matrice quadrata per un vettore. La matrice quadrata contiene, in ogni riga, i coefficienti dei polinomi di grado crescente, il vettore la parte letterale dei monomi. Ciò permette di esprimere la precedente uguaglianza vettoriale in questo modo:

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} k^0 \\ \sum_{k=1}^{n} k^1 \\ \sum_{k=1}^{n} k^2 \\ \sum_{k=1}^{n} k^3 \\ \sum_{k=1}^{n} k^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{30} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \\ n^5 \end{bmatrix}$$

Studente Sì. Vedo che in ognuna delle cinque righe della matrice ci sono i coefficienti dei polinomi del grado corrispondente al numero di riga. Le colonne corrispondono invece al grado dei monomi componenti e sono in ordine crescente proprio come nei polinomi che sono stati presentati. I polinomi scaturiscono quindi dal prodotto righe per colonne, moltiplicando elemento per elemento e sommando i risultati. Noto anche, nel primo vettore, che le somme precedenti sono state espresse mediante il simbolo di sommatoria...
Presentatore Sì, per avvicinarci ulteriormente alla nuova formula generalizzante che risolve il problema per qualsiasi progressione aritmetica, non solo per la successione degli interi positivi.
Professore Notoriamente, il problema delle somme di potenze di interi successivi fu risolto, in modo esplicito, da Jacob Bernoulli in un suo libro pub-

blicato postumo, nel 1713 [1]. In una pagina di questo libro che oggi è facile consultare su internet, sono elencati, escluso l'esponente zero, i primi polinomi della serie insieme al metodo per continuarli utilizzando certi numeri speciali, prima sconosciuti, che furono chiamati *numeri di Bernoulli*. Questi numeri si ottengono da una funzione ricorsiva che utilizza i coefficienti binomiali; sono una successione di numeri razionali che, pur avendo alcune evidenti regolarità, variano in modo piuttosto caotico.
Anche questa nuova formula utilizza i numeri di Bernoulli?
Presentatore No, non li utilizza. Però si serve dell'algebra delle matrici che nel diciottesimo secolo era ancora sconosciuta. Ecco, con la nuova formula, come esprimere la precedente equazione:

$$\vec{S}(n,1,1) = G(1,1)\vec{N}(n)$$

Si noti che il numero di componenti, nel nostro esempio $m = 5$, non compare nella formula. Questo per allegerirla e generalizzarla implicitamente ad un numero m intero positivo qualsiasi.
Studente Immagino che le lettere con frecce indichino i due vettori e che G sia la matrice ma non capisco tutti quegli 1.
Presentatore La sequenza degli interi successivi è stata sostituita da una generica progressione aritmetica con h primo termine e d ragione o differenza comune, cioè la quantita da aggiungere ogni volta per ottenere il termine successivo:

$$h, \quad h+d, \quad h+2d, \quad h+3d, \quad h+4d, \quad ...$$

Gli interi successivi sono una particolare progressione aritmetica con $h = 1$ e $d = 1$
Studente $\vec{S}(n,h,d)$ é il vettore le cui componente sono le somme di n termini con basi in progressione aritmetica. Non mi è chiaro però come esprimere ciò mediante sommatorie di n addendi.
Presentatore L'esempio iniziale diventa:

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n}(h+(k-1)d)^0 \\ \sum_{k=1}^{n}(h+(k-1)d)^1 \\ \sum_{k=1}^{n}(h+(k-1)d)^2 \\ \sum_{k=1}^{n}(h+(k-1)d)^3 \\ \sum_{k=1}^{n}(h+(k-1)d)^4 \end{bmatrix} = G(h,d) \begin{bmatrix} n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \\ n^5 \end{bmatrix}$$

Professore Sì, sì ma il problema è come ottenere la matrice G(h,d)...
Presentatore Questo infatti è il succo della formula che ci accingiamo a presentare. G(h,d) si ottiene dal prodotto righe per colonne di due matrici binomiali. Anzi per essere più precisi si tratta del prodotto di una matrice binomiale per l'inversa di un'altra matrice binomiale.

Studente Cosa intende per matrice binomiale?
Presentatore Intendo matrici che possono essere costruite di ordine grande a piacere seguendo lo sviluppo della potenza di un binomio e quindi anche del triangolo di Tartaglia. Per esempio nel caso m=5, si hanno matrici del quinto ordine:

$$T(h,d)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ h & p & 0 & 0 & 0\\ h^2 & 2hp & p^2 & 0 & 0\\ h^3 & 3h^2p & 3hp^2 & p^3 & 0\\ h^4 & 4h^3d & 6h^2d^2 & 4hd^3 & d^4\end{bmatrix}\qquad A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 3 & 0 & 0\\ 1 & 4 & 6 & 4 & 0\\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5\end{bmatrix}$$

Ecco dunque la formula generale

$$\vec{S}(n,h,d)=G(h,d)\vec{N}(n)\qquad \text{con } G(h,d)=T(h,d)A^{-1}$$

gli esempi dovrebbero aver già chiarito i termini di questa formula ma indicando righe e colonne con $r=1,2,...m$ e $c=1,2,...m$, possiamo meglio definire i termini usati:

$$[T(h,d)]_{r,c}=\binom{r-1}{c-1}h^{r-c}d^{c-1}\quad \text{se } c\le r,\quad \text{altrimenti } 0\qquad h,d\in\mathbb{C}$$

$$[A]_{r,c}=\binom{r}{c-1}\qquad \text{se } c\le r,\quad \text{altrimenti } 0$$

$$[\vec{S}(h,d,n)]_r=\sum_{k=1}^{n}(h+(k-1)d)^{r-1}\qquad [\vec{N}(n)]_r=n^r$$

Professore Tutt'altro che immediata, ma non priva di eleganza... sorprendente comunque! Verificarla però non è difficile. Basta implementarla in un foglio di calcolo che, normalmente, dispone della possibilità di operare con le matrici. Nel nostro caso $h=1$ e $d=1$ e m=5, quindi la matrice T(1,1) diventa una matrice triangolare corrispondente al triangolo di Tartaglia limitato alle prime 5 righe. La matrice A si ottiene privando il triangolo di Tartagia dell'ultimo elemento di ogni riga. E' quindi agevole trovare l'inversa di A (fig.1) del quinto ordine e calcolare il prodotto $T(1,1)A^{-1}$ (fig.2)

Mi sembra che, tutto sommato, l'applicazione della formula con i moderni strumenti di calcolo sia agevole, sia perché non coinvolge direttamente i numeri di Bernoulli sia perché Il prodotto tra matrici si risolve con moltiplicazioni e somme. Più laborioso il calcolo dell'inversa che però è una costante indipendente dalla particolare progressione aritmetica. Inoltre la triangolarità delle matrici che compaiono nella formula rende tutto molto più semplice!

G1 | fx =MINVERSE(A1:E5)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	1	0	0	0	0		1	0	0	0	0	
2	1	2	0	0	0		-0,5	0,5	0	0	0	
3	1	3	3	0	0		0,16666	-0,5	0,33333	0	0	
4	1	4	6	4	0		0	0,25	-0,5	0,25	0	
5	1	5	10	10	5		-0,0333	0	0,33333	-0,5	0,2	

Figura 1: Uso di "minverse" per il calcolo della matrice inversa: I risultati sono in formato decimale.

M1 | fx =MMULT(A1:E5;G1:K5)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	1	0	0	0	0		1	0	0	0	0		1	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0		-0,5	0,5	0	0	0		0,5	0,5	0	0	0
3	1	2	1	0	0		0,16666	-0,5	0,33333	0	0		0,16666	0,5	0,33333	0	0
4	1	3	3	1	0		0	0,25	-0,5	0,25	0		0	0,25	0,5	0,25	0
5	1	4	6	4	1		-0,0333	0	0,33333	-0,5	0,2		-0,0333	0	0,33333	0,5	0,2

Figura 2: Uso di "mmult" per il calcolo del prodotto, righe per colonne, tra matrici.

2 La scoperta

Storico Molto interessante, questa formula, per quanto ne so, mi sembra un notevole passo avanti. La trovo, oltre che più generale, molto più elegante della tradizionale formula di Faulhaber che si serve dei numeri di Bernoulli. Questa invece deriva i suoi risultati direttamente dal triangolo di Tartaglia. E' la prima volta con le matrici si stabilisce un legame diretto tra il triangolo di Tartaglia e il problema della somma di potenze di interi successivi?
Presentatore No, non è la prima volta. Nel caso particolare delle somme di potenza di interi successivi questa relazione matriciale fu individuata da A.W.F. Edwards, agli inizi degli anni ottanta; la derivò da un'identità di Pascal risalente al 1654 [2]. Indipendentemente, intorno al 1990, G.Pietrocola riscoprì questo legame, fornendone, molti anni dopo, diverse dimostrazioni che pubblicò nel 2008[7] e nel 2017[8] quando era ancora all'oscuro del lavoro di Edwards. A quel che ci risulta, fu invece il primo a generalizzare questa relazione ad una progressione aritmetica qualsiasi, proprio mediante la formula che stiamo presentando. La sua formula generale è stata già pubblicata due volte, la prima nel 2021, corredata da una dimostrazione didattica, su Archimede [3], la seconda, l'anno successivo, su MatematicaMente [4], qui la dimostrazione è più sintetica, ma, in più, viene anche dimostrato il collegamento con i polinomi di Bernoulli e quindi con la tradizionale formula di Faulhaber. Ora la formula è di dominio pubblico trovandosi su voci dedicate in varie wikipedie [5] che citano come fonte le sue pubblicazioni.

Dott.L.P. Da un ricercatore mi sarei aspettato pubblicazioni su riviste più orientate verso la ricerca!
Presentatore Sì, ma si deve tener conto che questa formula non è stata scoperta da un professionista della ricerca. Il lungo percorso, iniziato da un giovane insegnante di matematica, incuriosito dal problema delle somme di potenze di interi successivi, e conclusa dallo stesso, ormai in pensione da oltre un decennio, con la scoperta della formula che stiamo presentando, è, in parte, raccontato dal protagonista stesso in una pubblicazione del 2008 in un sito didattico, Maecla[6]. L'autore racconta come iniziò ad interessarsi al problema e come molto tempo dopo fece una sorprendente quanto fortunosa scoperta che mise da parte e solo poco dopo essere andato in pensione provò a dimostrare; i suoi teoremi furono integrati al racconto pubblicato[7]. Poi, in attesa di un improbabile riscontro utile a capire se quella scoperta fosse nota o meno nel mondo della matematica, per molti anni non si occupò più dell'argomento, finché, nel 2017, decise di iniziare una lunga ricerca che lo porterà non solo a scoprire la formula presentata, molto più generale della precedente, ma anche a scrivere un trattato sul modello degli Elementi di Euclide; un trattato dove, abbandonando la tradizionale via analitica, partendo dalle matrici binomiali, dopo aver definito polinomi e numeri di Bernoulli, se ne dimostrano molte proprietà.
Professore Questo trattato è stato pubblicato?
Presentatore Per ora solo nel suo sito personale.
Dott.L.P. Mi sembra difficile stabilire se il contributo presentato in questa sede sia o meno da considerare originale. Infatti, già Pascal nel 1654, nel suo *Potestatum numericarum summa*, aveva dimostrato una formula circa la somma delle potenze dei primi numeri interi, estesa alle potenze di ogni progressione aritmetica.
Presentatore Si, ma erano formule ricorsive ardue da applicare in concreto. Infatti più tardi la formula diretta, detta di Faulhaber, nonostante la precedente opera di Pascal, fu accolta dalla comunità dei matematici come un'importante novità.
Dott.L.P. Si stima che ci siano migliaia di articoli sull'argomento; trovare risultati nuovi ed originali al giorno d'oggi va considerato estremamente difficile ma è arduo controllare una letteratura così vasta. Il fatto che la formula in questione sia già stata scoperta mi sembra probabile. Non so se sia mai stata espressa in forma matriciale, ma anche se ciò non fosse accaduto, non si può considerarla un'aggiunta rilevante alla teoria, quanto piùttosto una riscrittura in forma equivalente di relazioni note.
Presentatore Nonostante le nostre accurate ricerche non possiamo escludere che in qualche modo la relazione messa in luce dalla formula sia stata individuata precedentemente. Sicuramente però se la formula da qualche par-

te era già conosciuta non è mai stata divulgata come mi sembra che meriti. Comunque anche se la novità consistesse soltanto nell'aver espresso in forma matriciale un'intricata relazione sconosciuta ai più, non mi sembra un progresso di poco conto anche perché la dimostrazione data è relativamente semplice.[3]
Bene, il nostro tempo sta per scadere ma c'è ancora spazio per qualche domanda.
Informatico Vorrei sapere se , dal punto di vista del calcolo, il passaggio dai numeri di Bernoulli all'inversa di una matrice binomiale sia o meno una semplificazione.
Presentatore No, direi che le difficoltà di calcolo rimangono più o meno le stesse. Infatti da una parte se calcoliamo A^{-1}, nella prima colonna ritroviamo i numeri di Bernoulli, dall'altra se partiamo dai numeri di Bernoulli otteniamo facilmente A^{-1} moltiplicando elemento per elemento le tre matrici seguenti facilmente costruibili e generalizzabili ad un qualsiasi numero di componenti:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{30} & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{30} & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

oppure, equivalentemente, come dalla formula di Faulhaber:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & 0 \\ 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{30} & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{30} & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Il simbolo "$\circ$" è il cosiddetto prodotto di Hadamard, elemento per elemento. La terza matrice, uguale nelle due alternative, è una matrice triangolare di Toeplitz che ripete nelle colonne parte dei numeri di Bernoulli che sono nella prima colonna.
Mi dispiace, ma non c'è più tempo. Vi ringrazio per la partecipazione e spero di potervi incontrare in un altra occasione per approfondimenti e dimostrazioni.

3 Bibliografia

Riferimenti bibliografici

[1] Jacob Bernoulli, Summae potestatum in Artis conjectandi, Internet Archive p.97, 1713

[2] A.W.F. Edwards, Sums of powers of integers Mathematical Gazette 66, 1982

[3] Matrici binomiali per insiemi di polinomi calcolanti somme di potenze su Archimede 4/2021

[4] Matrici binomiali per insiemi di polinomi calcolanti somme di potenze con basi in progressione aritmetica, MatematicaMente n.298, n.299

[5] Polynomials calculating sums of powers of arithmetic progressions, en-wikipedia, Polinomi calcolanti somme di potenze di progressioni aritmetiche, it-wikipedia

[6] Maecla - risorse per la didattica

[7] Esplorando un antico sentiero: teoremi sulla somma di potenze di interi successivi Parte I, Maecla, 2008 Parte II, Maecla, 2019

[8] On polynomials for the calculation of sums of powers of successive integers and Bernoulli numbers deduced from the Pascal's triangle, www.pietrocola.eu, 2017