L’algoritmo usato per scrivere il primo programma per elaboratore: la scelta di Ada per i numeri di Bernoulli

di Giorgio Pietrocola
www.pietrocola.eu
giorgio.pietrocola@gmail.com

Intervento al 7° Simposio APAV MAT^NAT 30 ottobre 2021 - Bellezza e fascino della Matematica

Sunto

Dopo aver mostrato una formula poco conosciuta per il calcolo dei numeri di Bernoulli si identifica quella usata nel primo programma per elaboratore mostrando, dopo aver tradotto nella notazione algebrica attuale, che non si tratta di un’altra formula poco conosciuta scoperta per l’occasione e poi forse dimenticata come sembra emergere da molti testi pubblicati in rete ma della formula implicita più comune presente in tutti i manuali che trattano di questi numeri.

1.Introduzione storica

Questo è, ai nostri tempi, l'inizio della infinita sequenza dei numeri di Bernoulli:

$$1;\ \pm\frac{1}{2};\ \frac{1}{6};\ 0;\ -\frac{1}{30};\ 0;\ \frac{1}{42};\ 0;\ -\frac{1}{30};\ 0;\ \frac{5}{66};\ 0;\ -\frac{691}{2730};\ 0;\ \frac{7}{6};\ 0;\ -\frac{3617}{510};\ 0\ \ldots$$

Usualmente questi numeri si indicano con B_j dove l'indice intero parte da zero. Quella con $B_1=-½$ è la variante più comune ma a volte conviene invece considerare la variante con $B_1=½$ (Sloane 1964a ; 1964b)
Nel diciottesima secolo fu pubblicato postumo, "Ars Conjectandi" (Bernoulli 1713) in cui l'autore Jacob Bernoulli (1654-1705), come si può leggere in rete grazie a Internet Archive, presenta una formula generale (riportata in *fig.3*) per il calcolo delle somme di potenze di interi successivi che faceva ricorso a questi inediti numeri razionali a cui sarà dato il suo nome e che risultarono poi matematicamente molto interessanti anche in altri contesti. La formula che li utilizzava invece, avendo lo stesso autore riconosciuto il contributo avuto nella scoperta, fu chiamata formula di Faulhaber (1580-1635). La formula trovata non fu però dimostrata.
Dopo oltre un secolo fu Carl Jacobi (1804-1851) a riuscirci (Jacobi 1834). La dimostrazione si basava sugli sviluppi dell'analisi matematica che aveva fatto emergere che:

$$\frac{x}{e^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!} \qquad (1)$$

Anche i numeri di Bernoulli, seguendo la stessa via furono definiti analiticamente.
L'ingegnere italiano Luigi Federico Menabrea (1809-1896) si dedicò alla descrizione di un progetto, appena presentato a Torino, che poi pubblicò a Ginevra nel 1842 con il titolo "Notions sur la machine analytique de Charles Babbage".
L’anno successivo il testo fu tradotto in inglese con l'aggiunta di importanti note del traduttore che ne aumentarono significativamente volume e importanza (Lovelace 1843). Tra le note veniva infatti pubblicato per la prima volta un programma informatico o meglio un programma che era sul punto di anticipare di un secolo l'era informatica.
Questo infatti avrebbe dovuto collaudare una macchina calcolatrice meccanica programmabile che per i costi elevati e la mancanza dei necessari finanziamenti non sarà mai costruita.
I visionari responsabili dell'impresa avveniristica furono un ingegnere inglese, di nome Charles Babbage (1791-1871), che aveva progettato la macchina, e una matematica sua collaboratrice che aveva scritto il programma che avrebbe permesso a quella macchina il calcolo dei numeri di Bernoulli (vedi *fig. 1*). Questa matematica era Augusta Ada Byron (1815-1852), figlia del famoso poeta Lord Byron, divenuta

dopo il matrimonio Contessa di Lovelace. In una delle sue note veniva scelta e dimostrata una particolare formula, mostrata in *fig.2*, per il calcolo ricorsivo dei numeri di Bernoulli. Su questa formula apparentemente sconosciuta si è basato l'algoritmo da lei ideato e pubblicato.

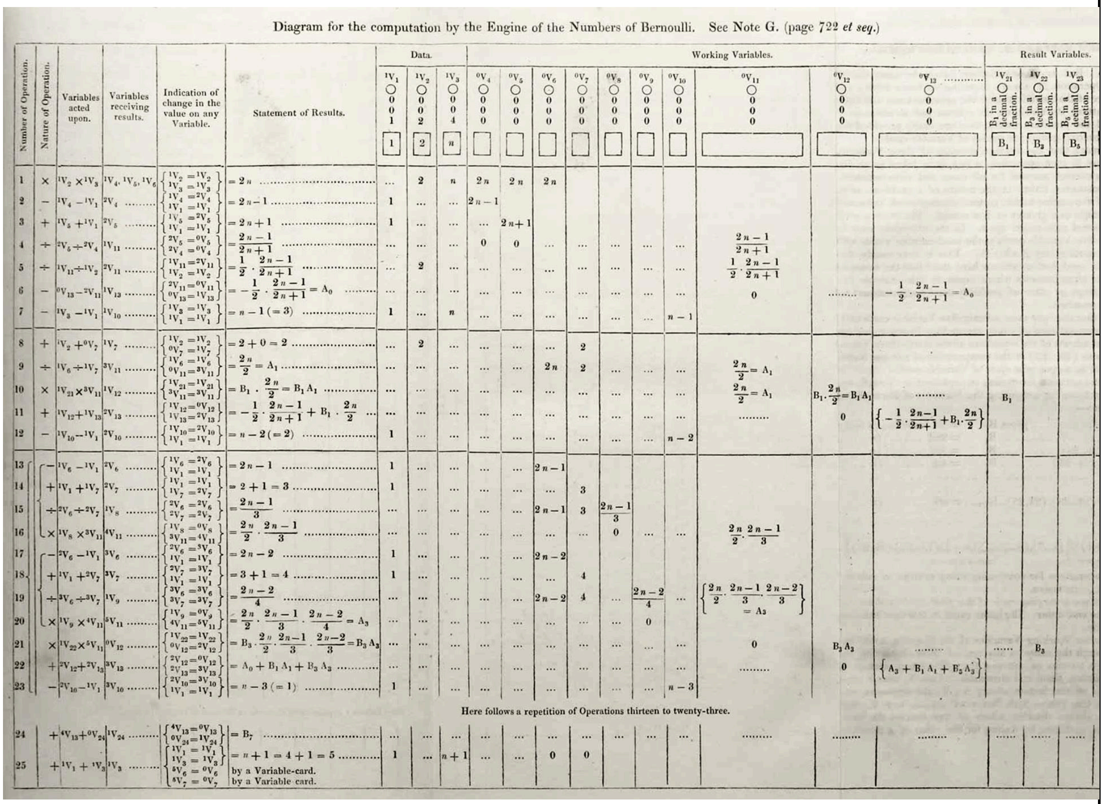

Diagram for the computation by the Engine of the Numbers of Bernoulli. See Note G. (page 722 *et seq.*)

Number of Operation.	Nature of Operation.	Variables acted upon.	Variables receiving results.	Indication of change in the value on any Variable.	Statement of Results.	Data.			Working Variables.										Result Variables.		
						${}^1V_1$ ○ 0 0 0 1 $\boxed{1}$	${}^1V_2$ ○ 0 0 0 2 $\boxed{2}$	${}^1V_3$ ○ 0 0 0 4 $\boxed{n}$	${}^0V_4$ ○ 0 0 0 0	${}^0V_5$ ○ 0 0 0 0	${}^0V_6$ ○ 0 0 0 0	${}^0V_7$ ○ 0 0 0 0	${}^0V_8$ ○ 0 0 0 0	${}^0V_9$ ○ 0 0 0 0	${}^0V_{10}$ ○ 0 0 0 0	${}^0V_{11}$ ○ 0 0 0 0	${}^0V_{12}$ ○ 0 0 0 0	${}^0V_{13}$ .... ○ 0 0 0 0	${}^1V_{21}$ ○ B_1 in a decimal fraction. $\boxed{B_1}$	${}^1V_{22}$ ○ B_3 in a decimal fraction. $\boxed{B_3}$	${}^1V_{23}$ ○ B_5 in a decimal fraction. $\boxed{B_5}$
1	×	${}^1V_2 \times {}^1V_3$	${}^1V_4, {}^1V_5, {}^1V_6$	${}^1V_2 = {}^1V_2$; ${}^1V_3 = {}^1V_3$	$= 2n$	...	2	n	$2n$	$2n$	$2n$										
2	−	${}^1V_4 - {}^1V_1$	${}^2V_4$	${}^1V_4 = {}^2V_4$; ${}^1V_1 = {}^1V_1$	$= 2n - 1$	1	...	...	$2n-1$												
3	+	${}^1V_5 + {}^1V_1$	${}^2V_5$	${}^1V_5 = {}^2V_5$; ${}^1V_1 = {}^1V_1$	$= 2n + 1$	1	...	...	...	$2n+1$											
4	÷	${}^2V_5 \div {}^2V_4$	${}^1V_{11}$	${}^2V_5 = {}^0V_5$; ${}^2V_4 = {}^0V_4$	$= \frac{2n-1}{2n+1}$	...	...	...	0	0	...	...	...	...	...	$\frac{2n-1}{2n+1}$					
5	÷	${}^1V_{11} \div {}^1V_2$	${}^2V_{11}$	${}^1V_{11} = {}^2V_{11}$; ${}^1V_2 = {}^1V_2$	$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2n-1}{2n+1}$	...	2	...	...	...	...	...	...	...	...	$\frac{1}{2} \cdot \frac{2n-1}{2n+1}$					
6	−	${}^0V_{13} - {}^2V_{11}$	${}^1V_{13}$	${}^2V_{11} = {}^0V_{11}$; ${}^0V_{13} = {}^1V_{13}$	$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{2n-1}{2n+1} = A_0$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	0	....	$-\frac{1}{2} \cdot \frac{2n-1}{2n+1} = A_0$			
7	−	${}^1V_3 - {}^1V_1$	${}^1V_{10}$	${}^1V_3 = {}^1V_3$; ${}^1V_1 = {}^1V_1$	$= n - 1\ (= 3)$	1	...	n	...	...	...	...	...	...	$n-1$						
8	+	${}^1V_2 + {}^0V_7$	${}^1V_7$	${}^1V_2 = {}^1V_2$; ${}^0V_7 = {}^1V_7$	$= 2 + 0 = 2$	...	2	...	...	...	...	2									
9	÷	${}^1V_6 \div {}^1V_7$	${}^3V_{11}$	${}^1V_6 = {}^1V_6$; ${}^0V_{11} = {}^3V_{11}$	$= \frac{2n}{2} = A_1$	...	...	...	...	...	$2n$	2	...	...	...	$\frac{2n}{2} = A_1$					
10	×	${}^1V_{21} \times {}^3V_{11}$	${}^1V_{12}$	${}^1V_{21} = {}^1V_{21}$; ${}^3V_{11} = {}^3V_{11}$	$= B_1 \cdot \frac{2n}{2} = B_1 A_1$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	$\frac{2n}{2} = A_1$	$B_1 \cdot \frac{2n}{2} = B_1 A_1$	....	B_1		
11	+	${}^1V_{12} + {}^1V_{13}$	${}^2V_{13}$	${}^1V_{12} = {}^0V_{12}$; ${}^1V_{13} = {}^2V_{13}$	$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{2n-1}{2n+1} + B_1 \cdot \frac{2n}{2}$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	....	0	$\left\{-\frac{1}{2} \cdot \frac{2n-1}{2n+1} + B_1 \cdot \frac{2n}{2}\right\}$			
12	−	${}^1V_{10} - {}^1V_1$	${}^2V_{10}$	${}^1V_{10} = {}^2V_{10}$; ${}^1V_1 = {}^1V_1$	$= n - 2\ (= 2)$	1	...	...	...	...	...	...	...	...	$n-2$						
13	−	${}^1V_6 - {}^1V_1$	${}^2V_6$	${}^1V_6 = {}^2V_6$; ${}^1V_1 = {}^1V_1$	$= 2n - 1$	1	...	...	...	...	$2n-1$										
14	+	${}^1V_1 + {}^1V_7$	${}^2V_7$	${}^1V_1 = {}^1V_1$; ${}^1V_7 = {}^2V_7$	$= 2 + 1 = 3$	1	...	...	...	...	...	3									
15	÷	${}^2V_6 \div {}^2V_7$	${}^1V_8$	${}^2V_6 = {}^2V_6$; ${}^2V_7 = {}^2V_7$	$= \frac{2n-1}{3}$	...	...	...	...	...	$2n-1$	3	$\frac{2n-1}{3}$								
16	×	${}^1V_8 \times {}^3V_{11}$	${}^4V_{11}$	${}^1V_8 = {}^0V_8$; ${}^3V_{11} = {}^4V_{11}$	$= \frac{2n}{2} \cdot \frac{2n-1}{3}$	...	...	...	...	...	...	...	0	...	...	$\frac{2n}{2} \cdot \frac{2n-1}{3}$					
17	−	${}^2V_6 - {}^1V_1$	${}^3V_6$	${}^2V_6 = {}^3V_6$; ${}^1V_1 = {}^1V_1$	$= 2n - 2$	1	...	...	...	...	$2n-2$										
18	+	${}^1V_1 + {}^2V_7$	${}^3V_7$	${}^2V_7 = {}^3V_7$; ${}^1V_1 = {}^1V_1$	$= 3 + 1 = 4$	1	...	...	...	...	...	4									
19	÷	${}^3V_6 \div {}^3V_7$	${}^1V_9$	${}^3V_6 = {}^3V_6$; ${}^3V_7 = {}^3V_7$	$= \frac{2n-2}{4}$	...	...	...	...	...	$2n-2$	4	...	$\frac{2n-2}{4}$	...	$\left\{\frac{2n}{2} \cdot \frac{2n-1}{3} \cdot \frac{2n-2}{3} = A_3\right\}$					
20	×	${}^1V_9 \times {}^4V_{11}$	${}^5V_{11}$	${}^1V_9 = {}^0V_9$; ${}^4V_{11} = {}^5V_{11}$	$= \frac{2n}{2} \cdot \frac{2n-1}{3} \cdot \frac{2n-2}{4} = A_3$	...	...	...	...	...	...	...	...	0							
21	×	${}^1V_{22} \times {}^5V_{11}$	${}^0V_{12}$	${}^1V_{22} = {}^1V_{22}$; ${}^0V_{12} = {}^2V_{12}$	$= B_3 \cdot \frac{2n}{2} \cdot \frac{2n-1}{3} \cdot \frac{2n-2}{3} = B_3 A_3$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	0	$B_3 A_3$	....	......	B_3	
22	+	${}^2V_{12} + {}^2V_{13}$	${}^3V_{13}$	${}^2V_{12} = {}^0V_{12}$; ${}^2V_{13} = {}^3V_{13}$	$= A_0 + B_1 A_1 + B_3 A_3$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	....	0	$\{A_3 + B_1 A_1 + B_3 A_3\}$			
23	−	${}^2V_{10} - {}^1V_1$	${}^3V_{10}$	${}^2V_{10} = {}^3V_{10}$; ${}^1V_1 = {}^1V_1$	$= n - 3\ (= 1)$	1	...	...	...	...	...	...	...	...	$n-3$						
					Here follows a repetition of Operations thirteen to twenty-three.																
24	+	${}^4V_{13} + {}^0V_{24}$	${}^1V_{24}$	${}^4V_{13} = {}^0V_{13}$; ${}^0V_{24} = {}^1V_{24}$	$= B_7$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	....	....	....	......	......	......
25	+	${}^1V_1 + {}^1V_3$	${}^1V_3$	${}^1V_1 = {}^1V_1$; ${}^1V_3 = {}^1V_3$; ${}^5V_6 = {}^0V_6$; ${}^5V_7 = {}^0V_7$	$= n + 1 = 4 + 1 = 5$; by a Variable-card.; by a Variable card.	1	...	$n+1$	...	...	0	0									

Figura 1 Diagramma per l'implementazione nella macchina di Baggage della formula scelta (Lovelace 1843)

or from many others. As however our object is not simplicity or facility of computation, but the illustration of the powers of the engine, we prefer selecting the formula below, marked (8.) This is derived in the following manner:—

If in the equation

$$\frac{x}{\epsilon^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \mathrm{B}_1\frac{x^2}{2} + \mathrm{B}_3\frac{x^4}{2\cdot 3\cdot 4} + \mathrm{B}_5\frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \cdots (4$$

(in which B_1, $\mathrm{B}_3 \ldots$, &c. are the Numbers of Bernoulli), we expand the denominator of the first side in powers of x, and then divide both numerator and denominator by x, we shall derive

$$1 = \left(1 - \frac{x}{2} + \mathrm{B}_1\frac{x^2}{2} + \mathrm{B}_3\frac{x^4}{2\cdot 3\cdot 4} + \cdots\right)\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2\cdot 3} + \frac{x^3}{2\cdot 3\cdot 4} + \cdots\right)$$

If this latter multiplication be actually performed, we shall have a series of the general form

$$1 + \mathrm{D}_1 x + \mathrm{D}_2 x^2 + \mathrm{D}_3 x^3 + \cdots \qquad (6.)$$

in which we see, first, that all the coefficients of the powers of x are severally equal to zero; and secondly, that the general form for D_{2n}, the coefficient of the $2n$+1th *term* (that is of x^{2n} any *even* power of x), is the following:—

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2\cdot 3\ldots 2n+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot 3\ldots 2n} + \frac{\mathrm{B}_1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot 3\ldots 2n-1} + \frac{\mathrm{B}_3}{2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{1}{2\cdot 3\ldots 2n-3} + \\ \qquad + \frac{\mathrm{B}_5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\cdot\frac{1}{2\cdot 3\ldots 2n-5} + \cdots + \frac{\mathrm{B}_{2n-1}}{2\cdot 3\ldots 2n}\cdot 1 = 0 \end{array}\right\} \quad (7.)$$

Multiplying every term by $(2\cdot 3\ldots 2n)$ we have

$$\left.\begin{array}{l} 0 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2n-1}{2n+1} + \mathrm{B}_1\left(\frac{2n}{2}\right) + \mathrm{B}_3\left(\frac{2n\cdot(2n-1)\cdot(2n-2)}{2\cdot 3\cdot 4}\right) + \\ \qquad + \mathrm{B}_5\left(\frac{2n\cdot(2n-1)\ldots(2n-4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\right) + \cdots + \mathrm{B}_{2n-1} \end{array}\right\} \quad (8.)$$

Figura 2 La formula implicita (8) scelta da Ada Lovelace nella sua *Nota G* consultabile in rete. B_1, B_3, B_5, B_7,... corrispondono ai nostri B_2, B_4, B_6, B_8,... (Lovelace 1843)

... Atque si porrò ad altiores gradatim potestates pergere, levique negotio sequentem adornare laterculum licet :

Summae Potestatum

$\int n = \frac{1}{2}nn + \frac{1}{2}n$

$\int nn = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}nn + \frac{1}{6}n$

$\int n^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}nn$

$\int n^4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$

$\int n^5 = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}nn$

$\int n^6 = \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n$

$\int n^7 = \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{1}{12}nn$

$\int n^8 = \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \frac{2}{9}n^3 - \frac{1}{30}n$

$\int n^9 = \frac{1}{10}n^{10} + \frac{1}{2}n^9 + \frac{3}{4}n^8 - \frac{7}{10}n^6 + \frac{1}{2}n^4 - \frac{1}{12}nn$

$\int n^{10} = \frac{1}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^9 - 1n^7 + 1n^5 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{5}{66}n$

Quin imò qui legem progressionis inibi attentuis ensperexit, eundem etiam continuare poterit absque his ratiociniorum ambabimus : Sumtâ enim c pro potestatis cujuslibet exponente, fit summa omnium n^c seu

$$\int n^c = \frac{1}{c+1}n^{c+1} + \frac{1}{2}n^c + \frac{c}{2}An^{c-1} + \frac{c \cdot c-1 \cdot c-2}{2 \cdot 3 \cdot 4}Bn^{c-3}$$

$$+\frac{c \cdot c-1 \cdot c-2 \cdot c-3 \cdot c-4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}Cn^{c-5}$$

$$+\frac{c \cdot c-1 \cdot c-2 \cdot c-3 \cdot c-4 \cdot c-5 \cdot c-6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}Dn^{c-7} \ldots \text{\& ita deinceps,}$$

exponentem potestatis ipsius n continué minuendo binario, quosque perveniatur ad n vel nn. Literae capitales A, B, C, D & c. ordine denotant coëfficientes ultimorum terminorum pro $\int nn$, $\int n^4$, $\int n^6$, $\int n^8$, & c. nempe

$$A = \frac{1}{6}, B = -\frac{1}{30}, C = \frac{1}{42}, D = -\frac{1}{30}.$$

Figura 3 La formula di Faulhaber come presentata da Bernoulli. A, B, C, D, ... corrispondono ai nostri B_2, B_4, B_6, B_8,... (Bernoulli 1713)

2. Ricercando

Come raccontai nel precedente simposio (Pietrocola 2019) i miei studi sulle somme di potenze di interi successivi mi hanno portato a interessarmi ai numeri di Bernoulli. Durante queste ricerche scoprii e dimostrai anche una formula per generarli che sembra essere una novità ma che, comunque, non è molto nota. Eccola:

$$B_m = \frac{|H_m|}{(m+1)!} \qquad [H_m]_{r,c} = \begin{cases} 0 & \text{se } c > 1 + r \\ \binom{1+r}{c-1} & \text{se } c \leq 1 + r \end{cases}$$

dove m>1, r e c numeri interi da 1 a m (Pietrocola 2017a)
H_m è una matrice di Hessemberg di m righe e m colonne coincidente, nei valori non nulli, con parte del triangolo di Tartaglia.
Per esempio per m=10 risulta:

$$B_{10} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 28 & 56 & 70 & 56 & 28 & 8 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & 36 & 84 & 126 & 126 & 84 & 36 & 9 & 0 \\ 1 & 10 & 45 & 120 & 210 & 252 & 210 & 120 & 45 & 10 \\ 1 & 11 & 55 & 165 & 330 & 462 & 462 & 330 & 165 & 55 \end{vmatrix}}{11!} = \frac{3024000}{39916800} = \frac{5}{66}$$

Questa formula non sarà particolarmente utile ma, almeno a giudizio del suo scopritore o riscopritore, ha il fascino e la bellezza che gli deriva dalla connessione con il celebre triangolo.
Quando nel 2017 ripresi le mie ricerche matematiche, ben sapendo che molti sono i modi di ottenere i numeri di Bernoulli, mi chiesi quale fosse stato quello utilizzato nel famoso algoritmo che avrebbe dovuto permettere alla macchina progettata il calcolo di questi numeri.
Per cercare di soddisfare questa curiosità seguii inutilmente diverse strade. Prima consultai nella mia biblioteca personale libri e enciclopedie poi mi procurai appositamente testi che mi sembrava promettessero di risolvere la questione come "Ada's Algorithm" (Essinger 2013).
Naturalmente cercai anche notizie in rete anche in lingua inglese ma rimasi deluso.
In particolare trovai ben cinque diversi siti che raccontavano in lingua italiana tutti la stessa storia, con le stesse formule e gli stessi passaggi, come se avessero tutti, come scolari furbetti, copiato da una medesima fonte. Tra questi spiccava una tesi universitaria sui numeri di Bernoulli.

Scoprii che la prima pubblicazione di quel testo copiato era comparsa su Wikipedia in lingua italiana alla voce "Algoritmo di Ada Lovelace per i numeri di Bernoulli" e risaliva al 2005 (Blanka-itwiki 2005)

Anche la tesi (Aru 2011), che in un primo momento avevo supposto potesse essere la fonte originale, citava tranquillamente quella voce di Wikipedia.

Questo non dovrebbe accadere perché Wikipedia notoriamente non può assicurare l'attendibilità dei propri testi (consulta in rete Wikipedia:Attendibilità di Wikipedia)

Come essa stessa dichiara non è una fonte citabile, ma piuttosto uno strumento di divulgazione che si basa su quanto fonti attendibili hanno già affermato in precedenza, citandole.

Non sono quindi i contenuti di Wikipedia in quanto tali ad essere direttamente attendibili, come invece avviene con le normali enciclopedie ma piuttosto le fonti citate e le informazioni verificabili utilizzate per scriverli.

In quella tesi, dunque, sarebbe stato bene citare le fonti che la voce consultata citava che però, in questo caso particolare, erano assenti!

Questo avrebbe dovuto insospettire l'autore e il relatore e anche i wikipediani, così sono chiamati gli utenti che danno gratis il loro contributo a questa opera collettiva.

Questi normalmente, in casi simili, mettono un avviso nella pagina evidenziando la carenza e invitando gli utenti volenterosi a fornire le fonti mancanti.

Così non andò e il risultato fu che una voce piena di errori, anche elementari, formule sbagliate e confronti di algoritmi storicamente ingiustificati poté fare mostra di sé in rete, sostanzialmente immutata, per dodici lunghi anni.

Questo finché, dopo aver scoperto autonomamente quello che nei siti disponibili e nei libri consultati non avevo trovato, decisi da utente anonimo di riscriverla citando la famosa *Nota G* scritta dalla Byron, fonte primaria disponibile in rete.

La mia versione fu accettata dalla comunità dei wikipediani ma i siti che si erano affidati alla precedente versione dopo più di quattro anni non ne hanno ancora preso atto e continuano immutati a diffondere un testo che forse in origine era stato solo una burla.

Non starò qui a spiegare nei dettagli gli errori riscontrati che non sono difficili da individuare e che il letttore stesso potrà divertirsi a scoprire ma voglio evidenziare la natura delle difficoltà che, a mio avviso, hanno generato confusione impedendo ai più di capire e di riconoscere la formula, pur ben conosciuta, su cui si basa l'algoritmo implementato in quel primo programma.

Il fatto è che il linguaggio matematico usato nell'ottocento è simile ma non uguale al nostro. Questa piccola diversità è però quanto basta per rendere certe formule irriconoscibi. In quei tempi come anche nel secolo precedente i numeri di Bernoulli cominciavano da 1/6 che per noi oggi è il terzo della serie. I primi due, quelli che oggi indichiamo B_0 e B_1 non erano presi in considerazione e non comparivano nelle formule. (Pietrocola 2017b, 2017c)

3. La formula di Faulhaber ieri e oggi e la sua particolarizzazione

In *fig.1* si può vedere la formula di Faulhaber nella sua veste originaria.
Usando notazioni moderne come il simbolo di sommatoria il fattoriale e il meno noto fattoriale decrescente (esempio: $10^{\underline{3}}$=10*9*8=720) la stessa diventa:

$$\sum_{k=1}^{n} k^m = \frac{1}{m+1}n^{m+1} + \frac{1}{2}n^m + \sum_{k=2}^{m} \frac{m^{\underline{k-1}}}{k!} B_k n^{m-k+1} \qquad (2)$$

A,B,C,D... usate da Bernoulli corrispondono ai nostri B_2, B_4, B_6, B_8
Notare che si è sfruttato il fatto che B_3, B_5 e tutti i successivi con indice dispari valgono zero. Essendo

$$\frac{m^{\underline{k-1}}}{k!} = \frac{m^{\underline{k-1}}(m+1-k)!}{k!(m+1-k)!} = \frac{m!}{k!(m+1-k)!} = \frac{1}{m+1}\binom{m+1}{k}$$

la stessa equivale a:

$$\sum_{k=1}^{n} k^m = \frac{1}{m+1}n^{m+1} + \frac{1}{2}n^m + \frac{1}{m+1}\sum_{k=2}^{m} \binom{m+1}{k} B_k n^{m-k+1}$$

Se poniamo ora B_0=1 e B_1=\½ otteniamo una variante dei numeri di Bernoulli (OEIS A164555) caratterizzata dal secondo elemento positivo, con questa convenzione la formula di Faulhaber si esprime con:

$$\sum_{k=1}^{n} k^m = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} B_k n^{m-k+1} \qquad (3)$$

Se si preferisce invece la convenzione più comune con B_1=-½ si è costretti a complicare artificiosamente la formula scrivendo:

$$\sum_{k=1}^{n} k^m = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m+1}{k} B_k n^{m-k+1}$$

Infatti così nella formula si cambia segno a tutti i numeri di Bernoulli con indice dispari ma poichè B_1 è l'unico diverso da zero si cambia segno solo a questo.
Se ora particolarizziamo la formula (3) ponendo n=1 otteniamo:

$$1 = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} B_k$$

Aggiungendo -1 ai due membri il secondo addendo del secondo membro, B_1=½, diventa -½ cambiando segno.
Ciò permette di tornare alla convenzione più comune dei numeri di Bernoulli in cui è proprio B_1=-1/2 scrivendo:

$$0 = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k}B_k$$

da cui

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k}B_k = 0 \qquad (4)$$

ed esplicitando per m>0:

$$B_m = -\frac{1}{m+1}\sum_{j=0}^{m-1}\binom{m+1}{j}B_j$$

questa ultima, l'avrete forse riconosciuta, a differenza dalla formula mostrata all'inizio e di altre altrettanto rare riportate da Ada nella sua *Nota G* e poi scartate (Lovelace 1843), è presente in tutti i manuali che si occupano di questi numeri.
Se invece particolarizziamo con n=1 la formula di Faulhaber nella veste originaria (2), in pochi e semplici passaggi si ottiene una forma equivalente alle precedenti:

$$0 = -\frac{1}{2}\frac{m-1}{m+1} + \sum_{k=2}^{m}\frac{m^{\underline{k-1}}}{k!}B_k \qquad (5)$$

Ebbene quest'ultima pur non somigliando affatto alla formula (4)} non solo è proprio la stessa ma è anche la stessa scelta dalla protoprogrammatrice (vedi *fig. 2*) dopo aver scartato due formule alternative riportate nella *nota G* che probabilmente le aveva passato Babbage su sua richiesta..
Infatti nel luglio del 1843 Ada Lovelace scriveva:\\
«Mio caro Babbage. Lavoro senza sosta per voi, come un diavolo in effetti forse lo sono. Penso che ne sarete lieto. Mi sembra che queste note avranno molto successo, e anche se la pubblicazione del libro subirà qualche ritardo varrà la pena aspettare. Voglio aggiungere qualcosa sui numeri di Bernoulli come esempio di come una funzione implicita possa essere risolta dalla macchina senza l'intervento di mani o teste umane. Vi prego di inviarmi i dati e le formule necessarie» (Ott 2019)
Ada nella sua *nota G* spiega anche i motivi della sua scelta tra tre diverse formule scrivendo:
«Poiché tuttavia il nostro oggetto non è la semplicità o la facilità di calcolo, ma l'illustrazione delle potenze della macchina, preferiamo selezionare la formula sottostante...» (Lovelace 1843)
La formula prescelta, estratta dalla sua nota, è mostrata in *fig. 2*
Nel riconoscere l'identità della formula di *fig. 2* con la formula (5) si tenga presente che l'ultimo addendo, risultando 1 il suo coefficiente, è $B_{m.}$
Si consideri anche che la formula scelta da Ada (*fig. 2*) non considera nello sviluppo gli addendi che moltiplicano numeri di Bernoulli nulli. Per questo il suo 2n corrisponde al nostro m\
.

4. La dimostrazione analitica indicata da Ada

Nella *nota G* però la formula non è ottenuta per la strada che ho mostrato ma viene presentata come una conseguenza dello sviluppo in serie infinita della funzione (1) seguendo la strada aperta da Jacobi pochi anni prima.

Specificando un passaggio combinatorio relativo al prodotto di polinomi infiniti lasciato al lettore nella *nota G* e usando simboli odierni dimostriamo qui la formula sceta e dimostrata da Ada (Lovelace 1843).

Si parte dalla (1). Considerando la funzione generatrice al primo membro si sostituisce la funzione esponenziale con il suo sviluppo in polinomio infinito:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ...$$

Si semplifica poi al denominatore -1 con il primo termine della serie di potenze e infine si divide per x supposto diverso dazero numeratore e denominatore:

$$\frac{x}{-1+e^x} = \frac{x}{x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ...} = \frac{1}{1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + ...}$$

Espandendo lo sviluppo in serie al secondo membro della (1) si ha:

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{0!}B_0 + \frac{x}{1!}B_1 + \frac{x^2}{2!}B_2 + \frac{x^3}{3!}B_3 + \frac{x^4}{4!}B_4 + ...$$

Espandendo lo sviluppo in serie al secondo membro della (\ref{eq:sviluppo}) si ha:

$$1 = (\frac{x^0}{1!} + \frac{x^1}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + ...)(\frac{x^0}{0!}B_0 + \frac{x^1}{1!}B_1 + \frac{x^2}{2!}B_2 + \frac{x^3}{3!}B_3 + ...) \qquad (6)$$

Moltiplicando tra loro i due polinomi infiniti abbiamo:

$$\begin{aligned}
&\frac{x^0}{1!0!}B_0 + \frac{x^1}{2!0!}B_0 + \frac{x^2}{3!0!}B_0 + \frac{x^3}{4!0!}B_0 + \frac{x^4}{5!0!}B_0 + ...\\
&\frac{x^1}{1!1!}B_1 + \frac{x^2}{2!1!}B_1 + \frac{x^3}{3!1!}B_1 + \frac{x^4}{4!1!}B_1 + \frac{x^5}{5!1!}B_1 + ...\\
&\frac{x^2}{1!2!}B_2 + \frac{x^3}{2!2!}B_2 + \frac{x^4}{3!2!}B_2 + \frac{x^5}{4!2!}B_2 + \frac{x^6}{5!2!}B_2 + ...\\
&\frac{x^3}{1!3!}B_3 + \frac{x^4}{2!3!}B_3 + \frac{x^5}{3!3!}B_3 + \frac{x^6}{4!3!}B_3 + \frac{x^7}{5!3!}B_3 + ...\\
&\frac{x^4}{1!4!}B_4 + \frac{x^5}{2!4!}B_4 + \frac{x^6}{3!4!}B_4 + \frac{x^7}{4!4!}B_4 + \frac{x^8}{5!4!}B_4 + ...
\end{aligned}$$

Infine sommando i monomi simili ordinati per grado che potete osservare sopra rappresentati lungo le linee diagonali si ha:

$$\frac{1}{0!}(1B_0)+$$

$$\frac{1}{1!}(1B_0+2B_1)x+$$

$$\frac{1}{2!}(1B_0+3B_1+3B_2)x^2+$$

$$\frac{1}{3!}(1B_0+4B_1+6B_2+4B_3)x^3+$$

$$\frac{1}{4!}(1B_0+5B_1+10B_2+10B_3+5B_4)x^4+\ldots$$

Come si vede i coefficienti dei numeri di Bernoulli formano un triangolo di Tartaglia privato dell'ultimo elemento di ogni riga. Il coefficiente del monomio di grado m è

$$\frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k}B_k$$

tutti questi coefficienti, per m>0 devono valere zero perchè questo polinomio infinito per la (6) coincide con una costante dunque deve valere la (4) che è , in notazione moderna , la formula implicita scelta per il collaudo della macchina progettata.

5. Conclusione

La leggenda fiorita nel web di una formula per i numeri di Bernoulli inventata per l'occasione dalla pioniera della programmazione pur non essendo inverosimile perché la Lovelace era un'otttima matematica lodata da maestri d'eccezione come Augustus De Morgan (1806-1871), appare priva di fondamento e contraria, come abbiamo visto, a ogni evidenza.

Infatti la lettera citata in cui chiede a Babbage delle formule evidenzia che Ada Lovelace non si è mai dedicata ad uno studio approfondito dei numeri di Bernoulli almeno prima del luglio 1843.

Questo però pur essendo matematicamente rilevante non altera l'originalità di quel programma dato alle stampe nella prima metà dell'ottocento.

Come ogni programmatore oggi sa, una formula, pur essendo indubbiamente un algoritmo, non esaurisce certo la procedura necessaria per permettere a una determinata macchina in grado di recepire un determinato linguaggio, i calcoli ad essa relativi.

Inoltre va notato che la formula implicita scelta è una formula ricorsiva in quanto occorrono tutti i risultati precedenti per ottenere il nuovo numero bernulliano. Il programma aveva lo scopo dichiarato di mostrare che la macchina era in grado di calcolare anche funzioni di questo tipo.

L'algoritmo, ideato senza precedenti di riferimento, aveva dunque il non facile compito di rendere operante questa formula ricorsiva sulla macchina progettata

.

Bibliografia

Sloane N.J.A, (1964a) A027641 in OEIS The on-lines encyclopedia of integer sequences, https://oeis.org/search?q=1%2C-1%2C1%2C0%2C-1%2C0&language=italian&go=cerca

Sloane N.J.A, (1964b) A164555 in OEIS The on-lines encyclopedia of integer sequences, https://oeis.org/search?q=1%2C1%2C1%2C0%2C-1%2C0&sort=&language=italian&go=cerca

Bernoulli J. (1713), Summa potestatum in Artis Conjectandi, p.97 (consultabile in Internet Archive)

Jacobi C. (1834), De usu legitimo formulae summatoriae Maclaurinianae. Journal für die reine und angewandte Mathematik. 12. pp. 263–72

Lovelace A. (1843) Nota G in Sketch the analytical engine invented by Charles Babbage...with notes…, Menabrea L, Taylor pp.724-726 (consultabile su google libri)

Pietrocola G. (2019), Didattica delle matrici applicate al classico problema della somma di potenze di interi successivi in 6° simposio Mat^Nat Fontecchio 2019, http://www.pietrocola.eu/ricerchebernoulli/percorsodidattico.pdf

Pietrocola G. (2017a), On polynomials for the calculation of sums of powers of successive integers and Bernoulli numbers deduced from Pascal's arithmetical triangle, http://www.pietrocola.eu/EN/Theoremsonthesumofpowersofsuccessiveintegersbygiorgiopietrocola%20.pdf

Pietrocola G. (2017b) Internet e l’algoritmo di Ada Byron,
http://www.maecla.it/Matematica/Internet_e_l_algoritmo_di_Ada_Byron.pdf

Pietrocola G. (2017c) Dialogo con la formula che anticipò di un secolo l'era informatica, www.pietrocola.eu/ricerchebernoulli/Divulgativo%20(4).pdf

Aru S. & Cadeddu L. (2011), L’algoritmo di Ada Lovelace per i numeri di Bernoulli in tesi di laurea: I numeri di Bernoulli,
https://www.luciocadeddu.com/tesi/Aru_magistrale.pdf

Essinger J. (2013),, Ada's Algorithm, Gibson Square, London, 2013

Ott O. (2019) Ada Lovelace, L'appassionata scienziata e poetessa all'origine dell'informatica moderna, RBA Italia, 2019 p.143

Blanka-itwiki (2005), Algoritmo di Ada Lovelace per i numeri di Bernoulli. Wikipedia it, 2005
https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Algoritmo_di_Ada_Lovelace_per_i_numeri_di_Bernoulli&oldid=512627