Matrici binomiali per formule di Faulhaber, numeri e polinomi di Bernoulli

Giorgio Pietrocola
giorgio.pietrocola[at]gmail.com
www.pietrocola.eu

6 gennaio 2023

1 Esempi riassuntivi

In questa stessa rivista [1], ho dimostrato che la somma di n potenze con basi in progressione aritmetica ed esponenti costanti interi non negativi è espresso da polinomi nella variabile n i cui coefficienti sono dati dalla matrice $G(h,d) =$

$$= T(h,d)A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h & d & 0 & 0 & 0 \\ h^2 & 2hd & d^2 & 0 & 0 \\ h^3 & 3h^2d & 3hd^2 & d^3 & 0 \\ h^4 & 4h^3d & 6h^2d^2 & 4hd^3 & d^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 \end{bmatrix}^{-1} =$$

dove h è il primo termine della progressione e d la ragione. Nell'esempio è $m = 5$ per cui i polinomi corrispondono a somme di potenze dal grado 0 fino al grado $m-1$ ma, scegliendo un valore di m maggiore si può arrivare facilmente oltre seguendo lo sviluppo del triangolo di Tartaglia.
Ho dimostrato anche che il risultato del precedente prodotto può essere espresso in una forma dipendente dai polinomi di Bernoulli:

$$= \begin{bmatrix} 1\frac{1}{1}B_0(\frac{h}{d}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\frac{d}{2}B_1(\frac{h}{d}) & 1\frac{d}{2}B_0(\frac{h}{d}) & 0 & 0 & 0 \\ 3\frac{d^2}{3}B_2(\frac{h}{d}) & 3\frac{d^2}{3}B_1(\frac{h}{d}) & 1\frac{d^2}{3}B_0(\frac{h}{d}) & 0 & 0 \\ 4\frac{d^3}{4}B_3(\frac{h}{d}) & 6\frac{d^3}{4}B_2(\frac{h}{d}) & 4\frac{d^3}{4}B_1(\frac{h}{d}) & 1\frac{d^3}{4}B_0(\frac{h}{d}) & 0 \\ 5\frac{d^4}{5}B_4(\frac{h}{d}) & 10\frac{d^4}{5}B_3(\frac{h}{d}) & 10\frac{d^4}{5}B_2(\frac{h}{d}) & 5\frac{d^4}{5}B_1(\frac{h}{d}) & 1\frac{d^4}{5}B_0(\frac{h}{d}) \end{bmatrix}$$

Questa matrice, che ho espresso in forma fattorizzata, come le due precedenti, può essere agevolmente estesa a ordini $m > 5$. Per questo almeno potenzialmente è una formula generale. Tra i fattori in evidenza si riconosce il triangolo di Tartaglia ma questa volta privo, non dell'ultimo ma del primo elemento di riga.

2 Le formule di Faulhaber

Il nome può ingannare, il matematico tedesco Jhoan Faulhaber (1580-1635) non ci ha lasciato nessuna formula benché fosse indubbiamente un virtuoso del problema della somma di potenze di interi successivi, un problema famoso che ha catturato l'interesse dei migliori matematici sin dall'antichità. Fu il matematico svizzero Jacob Bernoulli (1654-1705) in un'opera postuma pubblicata nel 1713 [2] a darci una formula generale che fu poi intitolata a Faulhaber per il contributo, da tutti riconosciuto, dato alla scoperta. Al Bernoulli fu invece intitolata la strana successione di numeri razionali $\frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{30}, 0, \frac{1}{42}, 0, ...$, alternativamente nulli, da cui quella formula dipende. L'importanza di questi numeri crebbe nel tempo andando molto oltre il problema che li aveva fatti emergere. Passato più di un secolo, rompendo la regola dell'alternanza con zero, $B_0 = 1$ e $B_1 = -\frac{1}{2}$ diventarono i primi due numeri di Bernoulli. Recentemente le sequenze di numeri di Bernoulli sono diventate due B_k e B_k^+ [4]. Sono quasi identiche. L'unica differenza tra le due varianti è nel secondo elemento: $B_1^+ = \frac{1}{2}$. Per questi e altri motivi le formule di Faulhaber possono apparire diverse nella forma ma tutte esprimono la stessa sostanza: utilizzando coefficienti binomiali e numeri di Bernoulli ottengono somme di potenze di interi successivi. Tradizionalmente la formula calcola n addendi partendo da 1, qualche volta invece partendo da 0. La differenza tra il primo caso: $\sum_{k=0}^{n-1}(1+k)^r = \sum_{k=1}^{n} k^r$ e il secondo caso: $\sum_{k=0}^{n-1} k^r$ è minima perchè le due somme condividono quasi tutti gli addendi. Per questo la loro differenza è il monomio n^r. Ciò implica che i polinomi di grado $r+1$ calcolanti le due somme differiscono solo per questo monomio, secondo in grado. Nè Bernoulli né tantomeno Faulhaber dimostrarono mai la loro formula che dovette aspettare oltre un secolo prima che Carl Jacobi (1804-1851), sull'onda dei progressi dell'analisi matematica che aveva ritrovato i numeri di Bernoulli nello sviluppo in serie di particolari funzioni, la dimostrasse [3].

3 Dalla matrice G(h,d) alle formule di Faulhaber

Ecco la mia formula G(h,1) particolarizzata per somme di potenze di interi successivi inizianti da h, con m=4: $\vec{S}_{h,1}(n) =$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{n-1}(h+k)^0 \\ \sum_{k=0}^{n-1}(h+k)^1 \\ \sum_{k=0}^{n-1}(h+k)^2 \\ \sum_{k=0}^{n-1}(h+k)^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\frac{1}{1}B_0(h) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\frac{1}{2}B_1(h) & 1\frac{1}{2}B_0(h) & 0 & 0 & 0 \\ 3\frac{1}{3}B_2(h) & 3\frac{1}{3}B_1(h) & 1\frac{1}{3}B_0(h) & 0 & 0 \\ 4\frac{1}{4}B_3(h) & 6\frac{1}{4}B_2(h) & 4\frac{1}{4}B_1(h) & 1\frac{1}{4}B_0(h) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \end{bmatrix}$$

moltiplicando la riga 4 per la colonna e particolarizzando il risultato per $h = 0$ e $h = 1$, si ottiene rispettivamente:

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^{m-1} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{m}\binom{m}{k} B_{m-k}(0) n^k \qquad \sum_{k=1}^{n} k^{m-1} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{m}\binom{m}{k} B_{m-k}(1) n^k$$

considerando che queste formule non valgono solo per $m = 4$, come nell'esempio, ma possono essere estese a un intero positivo qualsiasi, per riconoscerle come formule di Faulhaber basterà mostrare che $B_k(0) = B_k$ e che $B_k(1) = B_k^+$ cioè che le due varianti dei numeri di Bernoulli non sono altro che i valori particolari che i polinomi di Bernoulli assumono in 0 e in 1.

4 Sui polinomi di Bernoulli

Il primo a considerare questi polinomi allora ancora anonimi fu Eulero. La loro importanza crebbe con l'avanzare delle conoscenze finchè alla metà del secolo successivo gli fu dato il nome attuale. Enorme è il numero di pubblicazioni dedicate a questi polinomi nell'arco di tre secoli. Almeno sette i diversi approcci pensati per il loro studio [6] La definizione storica che mi sembra ancora oggi la più adottata è quella che lega questa sequenza di polinomi alla sua funzione generatrice:

$$\frac{te^{xt}}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

da questa si possono dedurre due casi particolari, per $x=0$ e $x=1$:

$$\frac{t}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(0)\frac{t^n}{n!} \qquad \frac{te^{t}}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(1)\frac{t^n}{n!}$$

Nel primo caso si ritrova la funzione generatrice dei numeri di Bernoulli diffusa in letteratura e molto spesso usata per definirli. Rara è invece, forse per la giovane età della variante, la seconda che comunque è presente[4]. Ciò basterebbe per lo scopo dichiarato ma per ulteriore conferma farò notare che, come si può verificare facilmente, la differenza tra le funzioni generatrici delle sequenze $B_n(1)$ e $B_n(0)$ è x. Dunque i due polinomi infiniti, aventi per coefficienti le rispettive sequenze bernoulliane, differiscono solo nei monomi di primo grado. Infatti la loro differenza risulta: $\frac{1}{2}x-(-\frac{1}{2}x)=x$.
Forse per contingenze storiche , far derivare i numeri di Bernulli dagli omonimi polinomi non è però ciò che di solito viene fatto. Al contrario è facile trovare i polinomi definiti a partire dai numeri omonimi: $B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_kx^{n-k}$
Accenno al fatto che i polinomi in questa forma si possono anche ottenere derivando la formula di Faulhaber. Ciò sembra troppo evidente per essere sfuggito a tanti matematici ma per ora non sono riuscito a trovarlo neppure accennato in letteratura. Più in generale ho anche scoperto che che $\vec{S}'_{h,d}(n)=\vec{B}(h+dn)$. Ciò lega profondamente i polinomi calcolanti somme di potenze [1] con i polinomi di Bernoulli. Che questa riscontrata rarità rifletta la difficoltà di estendere il significato di n, numero intero di addendi, ad un insieme più vasto che dia significato nel continuo alla regola formale della derivazione?

Le mie ricerche, ancora in corso, sulle matrici binomiali mi hanno portato, gradatamente, a definire i polinomi di Bernoulli e, come caso particolare, anche gli omonimi numeri. Partendo da questa definizione ho dimostrato molte loro proprietà, compresa la comparsa nelle funzioni generatrici già viste. A quanto ho potuto leggere e capire, il mio approccio non è classico e mi sembra nuovo. Comunque sia, a me sembra interessante e preferibile anche dal punto di vista didattico oltre che meritevole di essere conosciuto. Ecco quindi la definizione su cui mi sono basato:

$$\vec{B}(x)=A^{-1}N\vec{V}(x)$$

Un esempio con $m=6$ ordine delle matrici chiarirà il significato dei simboli usati:

$$\vec{B}(x)=\begin{bmatrix}B_0(x)\\B_1(x)\\B_2(x)\\B_3(x)\\B_4(x)\\B_5(x)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\1&2&0&0&0&0\\1&3&3&0&0&0\\1&4&6&4&0&0\\1&5&10&10&5&0\\1&6&15&20&15&6\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&2&0&0&0&0\\0&0&3&0&0&0\\0&0&0&4&0&0\\0&0&0&0&5&0\\0&0&0&0&0&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\x\\x^2\\x^3\\x^4\\x^5\end{bmatrix}=$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{30} & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{12} & 0 & \frac{5}{12} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2x \\ 3x^2 \\ 4x^3 \\ 5x^4 \\ 6x^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} + x \\ \frac{1}{6} - x + x^2 \\ -\frac{3}{2} + x^2 + x^3 \\ -\frac{1}{30} + x^2 - 2x^3 + x^4 \\ -\frac{1}{6}x + \frac{5}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^4 + x^5 \end{bmatrix}$$

L'equazione definente mette in relazione il vettore bernoulliano con quello vandermondiano. La relazione inversa è $\vec{V}(x) = N^{-1}A\vec{B}(x)$. Moltiplicando a sinistra i due membri della definizione data per A si ottiene: $A\vec{B}(x) = N\vec{V}(x)$. Moltiplicando la riga m-esima per la colonna del vettore bernoulliano si ha:

$$\sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k-1} B_{k-1}(x) = mx^{m-1}$$

cioè la proprietà di inversione che abbiamo utilizzato nel teorema "ponte Faulhaber" (P:5 n.299)[1]. Come caso particolare, dato che $N\vec{V}(0) = \vec{V}(0)$, si ha:

$$A\vec{B}(0) = \vec{V}(0)$$

La moltiplicazione dell'ultima riga m per la colonna diventa quindi:

$$\sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k-1} B_{k-1} = \begin{cases} 1 & \text{se } m = 1 \\ 0 & \text{se } m > 1 \end{cases}$$

Al variare di m questa equazione, risolta rispetto al numero di Bernoulli di indice maggiore, fornisce la nota formula ricorsiva per il calcolo di questi numeri. Nel 1842 questa stessa formula, in una veste adeguata ai tempi, fu scelta da una matematica, figlia di un celebre poeta, per essere implementata nel suo programma, il primo della storia, che avrebbe potuto calcolare ricorsivamente i numeri di Bernoulli se l'elaboratore meccanico, progettato da un ingegnere visionario oltre un secolo prima dell'era informatica, fosse stato realizzato.[5]

5 Bibliografia

Riferimenti bibliografici

[1] Matrici binomiali per insiemi di polinomi calcolanti somme di potenze con basi in progressione aritmetica MatematicaMente n.298, n.299

[2] Jacob Bernoulli, Summae potestatum in Artis conjectandi, Internet Archive p.97, 1713

[3] Carl Jacobi, De usu legitimo formulae summatoriae Maclaurinianae. Journal für die reine und angewandte Mathematik. 1834

[4] The on-line Encyclopedia of integer sequences: A027641, A027642 (Num. den. numeri di Bernoulli) e A164555/A027642 (variante)

[5] Giorgio Pietrocola, Internet e l'algoritmo di Ada Byron, contessa di Lovelace e incantatrice di numeri, Maecla, 2017

[6] Costabile-Dell'Accio-Gualtieri A new approach to Bernoulli polynomials 2006