La via cinematica alle mirabili spire

Giorgio Pietrocola
giorgio.pietrocola@gmail.com
www.pietrocola.eu

23 gennaio 2023

1 Una spirale non sempre correttamente intesa

A malintendere la "spira mirabilis" studiata e ammirata da Jacob Bernoulli iniziò, a quanto si dice, lo scalpellino che avrebbe dovuto esaudire il desiderio del matematico svizzero che l'avrebbe voluta incisa sulla sua lapide insieme alla scritta "Eadem mutata resurgo" (Mutata risorgo identica). Le spire scolpite da quell'artigiano di Basilea del diciottesimo secolo, si avvolgono mantenendo la stessa distanza tra loro e poi, esaurito lo spazio a disposizione, dopo pochi avvolgimenti, terminano al centro della circonferenza che ne delimita la visuale. Quella così realizzata però non corrisponde alla spirale logaritmica studiata da Bernoulli, ma a una spirale archimedea, così chiamata in onore del grande matematico greco che la inserì in un suo trattato [1]. Le due spirali, quella archimedea e quella logaritmica, si ottengono rispettivamente rappresentando in coordinate polari una funzione lineare ed una esponenziale. La prima è $\rho(\theta) = m\theta, \;$ con $m \neq 0$ con $\theta \geq 0$ per evitare il ripetersi simmetrico. La seconda è invece $\rho(\theta) = ae^{b\theta}$ con, $\; ab \neq 0$ Considerando, in ingresso, una qualsiasi successione di angoli in **progressione aritmetica**, indicando con α il primo termine e con β la ragione, tramite le due funzioni si ottengono, in uscita, le due diverse successioni riportate in tabella:

θ	$m\theta$	$ae^{b\theta}$
α	$m\alpha$	$ae^{b\alpha}$
$\alpha+\beta$	$m\alpha+m\beta$	$ae^{b\alpha+b\beta}$
$\alpha+2\beta$	$m\alpha+2m\beta$	$ae^{b\alpha+2b\beta}$
$\alpha+3\beta$	$m\alpha+3m\beta$	$ae^{b\alpha+3b\beta}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$

Nel caso della spirale archimedea si ha una **progressione aritmetica** con comune differenza (o ragione) $m\beta$. Nel caso della spirale logaritmica invece si ha

Figura 1: Cattedrale di Basilea. Lapide di Jacob Bernoulli
(fonte:wikimedia commons, foto di Wladyslaw Sojka, Licenza Arte Libera)

una **progressione geometrica** con comune quoziente (o ragione) $e^{b\beta}$. Dunque la trasformazione lineare mantiene il tipo di progressione mentre quella esponenziale la trasforma in geometrica. La tabella, letta al contrario, mostra anche che la funzione inversa dell'esponenziale, cioè la logaritmica, trasforma progressioni geometriche in aritmetiche. Considerando il caso particolare $\beta = 2\pi$, dopo ogni giro avremo angoli successivi che si sovrappongono. Di conseguenza saranno sovrapposti anche i relativi raggi, tutti contenuti nella semiretta individuata dall'angolo α e avente origine nel punto centrale detto polo. Su questa semiretta, secondo le rispettive funzioni, saranno individuati una serie di punti, uno per ogni intersezione della spirale.

2 Interpretazioni cinematiche

Come insegna già Archimede che ne fece uso nella sua opera, [1] l'approccio cinematico accresce la nostra capacità di vedere, comprendere e descrivere spirali.
Considerando θ come misura del tempo, scelto l'angolo α e la relativa semiretta con origine nel polo, i punti che si succedono dopo ogni giro quando la spirale interseca la semiretta, possono essere interpretati come moto di un punto. Se esistessero esseri viventi in quella semiretta, al trascorrere del tempo θ vedrebbero comparire e scomparire un punto dal loro angusto mondo

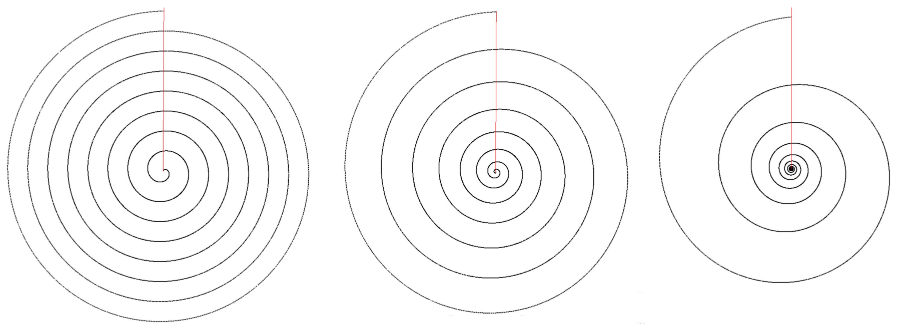

Figura 2: Tre spirali: primo grado, secondo grado e proporzionale

unidemensionale. Ogni volta potrebbero registrarne la posizione e cercare di prevedere il tempo e la posizione della prossima apparizione del loro misterioso astro. Immaginiamo che nel piano della spirale ci sia anche un secondo mondo rotante su un'altra semiretta con origine fissa nel polo e solidale con il punto-astro. Per un istante, ogni giro, come lancette di un orologio senza fine, il mondo dinamico si sovrapporrebbe a quello statico e gli osservatori nei due universi paralleli vedrebbero lo stesso astro. Gli ipotetici abitanti del mondo rotante, però, osserverebbero un punto avanzare con continuità al trascorrere del tempo. Nel caso della spirale archimedea, per esempio, vedrebbero un punto avanzare di $2\pi m$ al giro. Questa misura costante, che per noi è anche la distanza tra le spire della traiettoria, per loro sarà solo la velocità di avanzamento del punto nell'unità di tempo $giro = 2\pi$.

Scambiando causa ed effetto possiamo dare la seguente definizione: *La spirale archimedea è la traiettoria di un punto che si muove di moto rettilineo uniforme su una semiretta la quale ruota uniformemente intorno alla sua origine*

Indipendentemente dall'esistenza di improbabili esseri unidimensionali, l' approccio cinematico permette di vedere la spirale come traiettoria di un punto nel piano e di pensare questa come sovrapposizione di due moti, un moto circolare uniforme, sempre lo stesso per tutte le spirali, e un moto rettilineo del punto avanzante sulla semiretta.

Quale allora, usando questo approccio, il moto del punto sulla semiretta nel caso della spirale logaritmica?

Qui, come si può facilmente constatare[2], è facile essere fuorviati dalla fama predominante del moto uniformemente accelerato, un moto naturale comunissimo nel nostro mondo fisico data la legge di attrazione gravitazionale. Tuttavia, nonostante il fatto che anche la spirale logaritmica sia altrettanto famosa e altrettanto naturale, questa diffusa definizione definisce altro:[4]

La spirale logaritmica è la traiettoria di un punto che si muove di moto

uniformemente accelerato su una semiretta, la quale ruota uniformemente intorno alla sua origine.
Vero è che se fosse stato detto a quello scalpellino che le spire avrebbero dovuto distanziarsi sempre più, come accade alla posizione di un corpo in caduta libera, il suo lavoro sarebbe stato molto più conforme alle aspettative.

3 Dall'oltretomba

"Basta, basta! Ho un nome! Sono stufo di essere considerato da tutti uno scalpellino ignorante e di dovere, ogni volta, per questo, interrompere il mio sonno e rivoltarmi nella tomba!"
Probabilmente evocata da quanto scritto, una voce profonda e misteriosa si intromette!
"Sono Jhoann Jacob Keller ho vissuto dal 1665 al 1747 e sono stato uno stimato scultore della mia epoca. In gioventù ho lavorato in vari paesi europei, ho decorato il palazzo di Versailles e sono stato in Italia abbastanza per capire il significato dispregiativo dato talvolta al termine "scalpellino". Sono costretto ad intervenire perché tengo molto alla mia reputazione, guadagnata con una vita onesta e laboriosa dedita all'arte. Tornato dai miei viaggi di lavoro, ventisettenne, aprii un mio laboratorio di scultura a Basel: qui si formarono valenti artisti tra cui mio figlio che poi divenne soprattutto pittore e si trasferì in Olanda. Tra le molteplici opere che mi furono commissionate e che ora splendono in chiese e musei, ci furono alcuni epitaffi tra cui quello dedicato al grande matematico Jacob Bernoulli. Non è vero che non sapessi nulla di matematica! Conoscevo sia i logaritmi che le progressioni geometriche che sapevo ben distinguere da quelle aritmetiche. Non ero certo per questo un matematico ma la materia mi interessava e ne sapevo molto più di tanti miei detrattori odierni che credono che in una spirale logaritmica la distanza tra le spire aumenti in progressione aritmetica! Jacob stesso in vita mi aveva parlato della sua "mirabile spira" e, lodandomi, incoraggiò la mia passione per la geometria. Quella spirale che vi sembra un errore, è stata una mia idea valutata e apprezzata dalla famiglia Bernoulli. Soprattutto da Johann, anche lui come il fratello maggiore, matematico di chiarissima fama. Quando vide il mio progetto capì subito che si trattava di una rappresentazione della mirabile spira in scala logaritmica! Mi fece i complimenti e scherzò anche sul fatto che, forse non a caso, il mio nome comprendesse il suo e quello del fratello scomparso. Non c'erano solo motivi estetici in quella scelta, e non era solo una licenza artistica a giustificarla. C'era molto di più. Come le parole che la circondano, quella rappresentazione non è e non volle essere la mera

figura di una spirale proporzionale che non avrei avuto nessuna difficoltà a realizzare se avessi voluto. Invece ho dato la preferenza a una sua mirata trasformazione che si proponeva di evidenziare una delle tante mirabili proprietà nascoste messe in luce dal Bernoulli. Un modo, quindi, per attrarre l'attenzione e stimolare riflessione e conoscenza. Una sfida intellettuale che , si pensava, avrebbe coinvolto l'osservatore attento e che, quindi, prima o poi sarebbe stata capita e apprezzata. Ciò invece si è verificato solo in parte. Ho aspettato pazientemente per secoli, ma ormai il luogo comune dello scalpellino ignorante, oltre a infangare la mia memoria, temo abbia reso le menti impermeabili alla comprensione."

4 Un moto proporzionale

Scusate l'interruzione. Benché i fantasmi siano fonti difficilmente controllabili, alcune affermazioni fatte lo sono per cui ci è sembrato giusto dare spazio a quella voce. Non era nostra intenzione offendere qualcuno, ma certo saremo più attenti e rispettosi in futuro!
Torniamo ai nostri moti. Notoriamente un moto uniformemente accelerato è descritto da un'equazione di secondo grado che lega il tempo allo spazio percorso, la sua derivata prima, la velocità, è data da un'equazione di primo grado e quindi aumenta in progressione aritmetica e la sua derivata seconda, l'accelerazione, è costante. Senza scomodare il calcolo differenziale si può fare una tabella come quella fatta precedentemente anche per un generico monomio di secondo grado: $\rho(\theta) = k\theta^2$ con $k \neq 0$ e, per semplificare, con $\theta \geq 0$. Si potrà così constatare facilmente che i risultati in uscita non formano né progressione aritmetica né geometrica. Se però si calcolano le differenze prime, necessarie per il calcolo della velocità media, si troverà che aumenta ogni volta di una quantità costante $(2\beta^2)$. Ciò indica che in una spirale di questo tipo la distanza tra le spire aumenta in progressione aritmetica. Questo fatto, riscontrato in una spirale, come ha mostrato di sapere anche quel fantasma, esclude che possa trattarsi della mirabile spira bernoulliana. Infatti, come è facile ricavare anche dalla tabella iniziale, in una spirale logaritmica le differenze tra i risultati, così come i risultati stessi, crescono anche esse proporzionalmente mantenendo la stessa ragione $(e^{b\beta})$, così come accade sempre in una progressione geometrica.
Ma se non è il famoso moto uniformemente accelerato, quale moto del punto sulla semiretta rotante disegna una spirale logaritmica? La risposta è in un moto che sembra non avere nome! Lo chiameremo moto proporzionale. Il fatto è che il "moto" proporzionale è protagonista principale non del mondo della fisica ma di quello della biologia dove si parla molto spesso di crescita

proporzionale o esponenziale. Anche la spirale logaritmica a volte, con una scelta che dal punto di vista didattico mi sembra migliore, viene chiamata spirale proporzionale. Come il moto uniforme è un moto che, considerato in una progressione aritmetica di tempi, fa corrisponde una progressione aritmetica di spazi, così il moto proporzionale fa corrispondere una progressione geometrica di spazi.
Per finire questo tema di moti e di spirali, vorremmo mettere in dubbio un altro luogo comune assai diffuso. Si legge spesso, senza adeguata giustificazione, che le galassie che popolano il nostro universo hanno approssimativamente la forma di spirali logaritmiche. Quel vago "approssimativamente" rende problematica la confutazione, ma se ci fosse qualcosa di vero ci sarebbe da meravigliersi non poco perché quella spirale, per quanto visto, potrebbe pensarsi come risultante di un moto rotatorio e di un moto proporzionale che però non sembra agire nel nostro cosmo a quelle scale. Potrebbe andare meglio come approssimazione una spirale di secondo grado? C'è anche da dire, prima di tirare in ballo la spirale logaritmica, che la matematica fornisce una gamma infinita di insiemi di spirali di tipo diverso che potrebbero entrare in gioco. Basti pensare ai monomi di grado sempre maggiore che, a partire dal terzo, continuano la sequenza dei primi due casi che abbiamo esaminato.

Riferimenti bibliografici

[1] Sfere, in Opere di Archimede, a cura di Attilio Frajese, Classici UTET, Torino, pp.311-386, 1974

[2] Alcuni dei tanti siti in cui compare una presunta definizione cinematica di spirale logaritmica:

- dm.unife.it
- macosa.dima.unige.it
- www.1001storia.polimi.it
- www.matematicaescuola.it, corso luarea Lecce p.9 es.4.3
- /webthesis.biblio.polito.it, p.44
- www.math.it
- Leo Major, Spirale logaritmica, YouTube, 2020

[3] Libri in cui compare la stessa definizione fuorviante di spirale logaritmica

- Renato Betti, Geometria leggera: introduzione all'idea di spazio matematico,Franco Angeli 2015 2.2 Le curve nel piano

- Nuova enciclopedia popolare 1849 Spirale logaritmica

[4] Giorgio.Pietrocola, Definizione di spirale logaritmica: confutazione di un meme di successo, http://www.mathesis.verona.it/wp-content/uploads/2018/Numeri/Nume305.pdf , Matematicamente, n.305, Mathesis Verona, 2023