Dalle matrici binomiali ai polinomi di Bernoulli

Giorgio Pietrocola
giorgio.pietrocola[at]gmail.com
www.pietrocola.eu

21 febbraio 2022

Indice

1 Introduzione **1**
1.1 Primo incontro e viaggi successivi 1
1.2 Riassunto 2

2 G(0,1), G(1,1) e la loro relazione reciproca **3**

3 Numeri di Bernoulli **4**

4 La formula di Faulhaber **6**

5 Gruppi binomiali **8**
5.1 T(h,p), prodotto righe per colonne 8
5.1.1 Sottogruppo delle potenze di T 8
5.1.2 Sottogruppo delle matrici diagonali 9

6 Polinomi di Bernoulli **9**

7 Generalizzazione della Formula di Faulhaber **10**

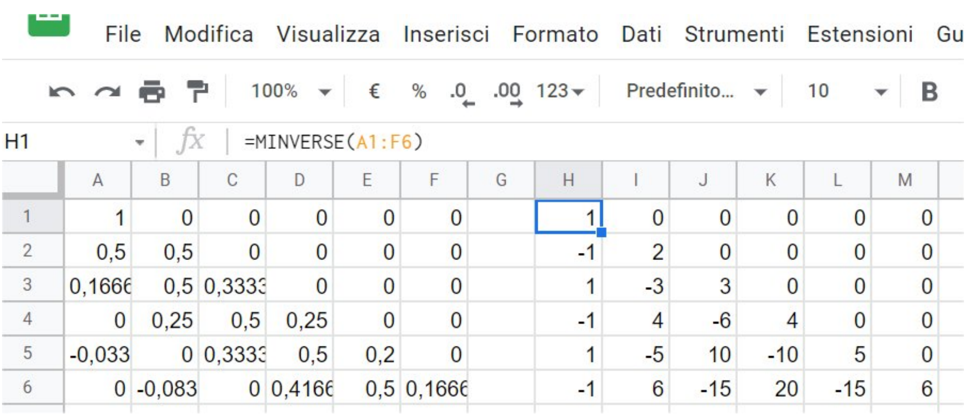
8 Relazione analitica tra i polinomi G(0,1) e i polinomi di Bernoulli **11**

9 Bibliografia **11**

1 Introduzione

1.1 Primo incontro e viaggi successivi

In questo articolo, come nell'articolo del 2021 [1], torno a parlare di particolari matrici legate ai coefficienti binomiali. La prima di queste la incontrai quasi per caso intorno al 1990. Stavo esercitandomi su un foglio di calcolo pensando a esercizi che avrei proposto il giorno dopo in laboratorio ai miei studenti. A proposito, consiglio anche ai mie lettori l'uso di questo strumento di calcolo per consolidare e verificare gli apprendimenti sulle straordinarie proprietà di queste matrici. Proprietà non meno sorprendenti di quelle assolutamente straordinarie



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	1	0	0	0	0	0		1	0	0	0	0	0
2	0,5	0,5	0	0	0	0		-1	2	0	0	0	0
3	0,1666	0,5	0,3333	0	0	0		1	-3	3	0	0	0
4	0	0,25	0,5	0,25	0	0		-1	4	-6	4	0	0
5	-0,033	0	0,3333	0,5	0,2	0		1	-5	10	-10	5	0
6	0	-0,083	0	0,4166	0,5	0,1666		-1	6	-15	20	-15	6

Figura 1: Matrice inversa dei coefficienti dei primi sei polinomi per il calcolo della somma di n potenze di interi successivi ottenuta con l'ausilio di un foglio di calcolo. Si invita il lettore a provare a implementare le matrici binomiali sul foglio di calcolo per verificare e consolidare quanto appreso.

del triangolo di Tartaglia da cui attingono. Ma torniamo al momento della prima apparizione. Mentre mi stavo esercitando con i comandi e con le proprietà delle matrici fui attratto da un vecchio quaderno dove molti anni prima avevo raccolto i coefficienti dei primi polinomi per il calcolo delle somme di potenze di interi successivi. Non conoscendo ancora nulla della storia di quel problema mi ero ricavato quei dati con l'interpolazione, in modo piuttosto laborioso facendomi aiutare da una delle prime calcolatrici programmabili in commercio. Volevo scoprire un ordine in quella successione di coefficienti ma non andai oltre le regolarità più evidenti. Memore di quella sfida persa decisi, senza un piano preciso, un tentativo estremo. Copiai quei dati sul mio foglio in una matrice triangolare, nelle caselle da A1 a F6, poi mi spostai nella casella H1 scrivendo "=matr.inversa(A1:F6)". Premuto invio, in un attimo emerse dalla nebbia davanti ai miei occhi increduli e stupefatti la prima matrice binomiale! L'esperimento che potete facilmente riprodurre è in fig.1. Potete verificare voi stessi sul vostro foglio di calcolo la correttezza del risultato immettendo "=matr.prodotto(A1:F6;H1:M6)" per ottenere l'elemento neutro. Nel risultato ci sono solo numeri interi a segni alternati ed è riconoscibile il triangolo di Tartaglia pur privato dell'ultimo elemento di ogni riga. Invertendo la matrice l'apparente imprevedibilità scompare! Questa esperienza mi spinse, molti anni dopo, a intraprendere prima bellissimi viaggi esplorativi e poi, quando finalmente la nebbia si diradò, a raccontare quelli che a me sono sembrati splendidi fiori scoperti in uno dei tanti luoghi intricati e armoniosi che caratterizzano il maestoso mondo della matematica.

1.2 Riassunto

Nell'articolo precedente [1] ho mostrato che le matrici binomiali permettono di ottenere i coefficienti dei polinomi calcolanti somme di potenze con basi variabili in progressione aritmetica $(h + pk \quad k = 0, 1, 2...n - 1)$ ed esponente intero non negativo $(m - 1)$ costante. Si è anche mostrato come e perchè la matrice triangolare $G(h,p)$ di ordine m risolve il problema.

$$G(h,p) = T(h,p)A^{-1}$$

Esempio con $m = 5$:

$$G(h,p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h & p & 0 & 0 & 0 \\ h^2 & 2hp & p^2 & 0 & 0 \\ h^3 & 3h^2p & 3hp^2 & p^3 & 0 \\ h^4 & 4h^3p & 6h^2p^2 & 4hp^3 & p^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 \end{bmatrix}^{-1}$$

Moltiplicando $G(h,p)$ per il vettore con componenti $(n\ n^2\ n^3\ ...\ n^m)$, al variare della riga r da 1 a m, si ottengono m polinomi di grado r calcolanti somme di n potenze con esponente $r-1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1}(h+kp)^{r-1} = [G(h,p)]_{r,1}n + [G(h,p)]_{r,2}n^2 + ... + [G(h,p)]_{r,r}n^r$$

Nota:Nell'articolo citato la matrice $G(h,p)$ dipendente da h e da $p \neq 0$, parametri caratterizzanti la progressione aritmetica, l'avevo indicata con $G_{h,p}$ per cercare di allegerire la notazione ma mi sono accorto che ciò crea confusione quando compaiono altri indici tanto che ciò ha portato ad un errore di stampa nel corollario conclusivo.

2 G(0,1), G(1,1) e la loro relazione reciproca

Qualche lettore del precedente articolo avrà notato la notevole somiglianza tra le due matrici:

- $G(0,1) = A^{-1}$ con i coefficienti dei polinomi per il calcolo di n somme di interi successivi inizianti da 0. Vedremo che nella prima colonna compaiono i numeri di Bernoulli.
- $G(1,1) = TA^{-1}$ con i coefficienti dei polinomi per il calcolo di potenze di n somme di interi successivi iniziantii da 1. Vedremo che nella prima colonna compare una variante quasi identica dei numeri di Bernoulli.

Ecco le due matrici a confronto nel caso m=6

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{30} & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{12} & 0 & \frac{5}{12} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & +\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & +\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{30} & 0 & \frac{1}{3} & +\frac{1}{2} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{12} & 0 & \frac{5}{12} & +\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Si noti che le due hanno uguali gli elementi corrispondenti, eccezion fatta per la diagonale immediatamente sotto la principale. Lascio al lettore la dimostrazione che le regole suggerite dalle due diagonali di questo esempio continuano ad essere rispettate per qualsiasi m intero positivo e per $r > 2$. Dimostrato ciò si potrà essere certi che i polinomi corrispondenti alle righe delle due matrici, per quanto riguarda i due monomi di grado più elevato, sono rispettivamente

$$... - \frac{1}{2}n^{r-1} + \frac{1}{r}n^r \qquad \text{e} \qquad ... + \frac{1}{2}n^{r-1} + \frac{1}{r}n^r$$

Per ogni ordine delle due matrici la loro differenza sarà esclusivamente nella diagonale cioè nel coefficiente del monomio secondo partendo dal grado più alto. Infatti, ponendo $q = r - 1$ e tenendo conto che $0^q = 0$ per $r > 1$, si ha:

$$\sum_{k=1}^{n} k^q - \sum_{k=0}^{n-1} k^q = \sum_{k=0}^{n} k^q - \sum_{k=0}^{n-1} k^q = n^q + \sum_{k=0}^{n-1} k^q - \sum_{k=0}^{n-1} k^q = n^q$$

Questo significa che i due polinomi di grado r corrispondenti alla riga r-esima di ciascuna matrice, differiscono solo per il coefficiente del monomio di grado $r - 1$ e si possono ottenere l'uno dall'altro aggiungendo o sottraendo n^{r-1}.
Sappiamo che invertendo la prima matrice otteniamo A. Ma cosa si ottiene invertendo la seconda? Proprio quello che abbiamo visto in fig.1! Una matrice identica alla A tranne per i segni alternati. La indicheremo con $\overline{A}$. Le due matrici binomiali A e $\overline{A}$ di uno stesso ordine sono in una relazione che chiameremo di alternanza perchè si possono ottenere l'una dall'altra moltiplicando ogni elemento corrispondente per $(-1)^{r+c}$ essendo r e c i numeri di riga e di colonna. Si noti che questa stessa relazione sussiste tra le rispettive inverse $G(0, 1)$ e $G(1, 1)$. Si può dimostrare che questo non è un caso particolare ma una legge generale. Se due matrici sono in relazione di alternanza devono esserlo anche le loro inverse. Accenno soltanto, lasciando ai lettori interessati dimostrazione o semplice verifica, al fatto che questa non è l'unica coppia ma che più in generale $G_{h,p}$ e $G_{p-h,p}$ sono in relazione di alternanza.

3 Numeri di Bernoulli

I numeri di Bernoulli furono pubblicati per la prima volta nel 1713 in un libro di Jacob Bernoulli (1654-1705), Ars conjectandi, insieme ad una formula generale per i polinomi calcolanti somme di potenze di interi successivi, poi intitolata a Faulhaber (1580-1635) [2]. Presto questi numeri emersero anche in altri campi della matematica (per esempio nello sviluppo in serie di determinate funzioni) ed assunsero un importanza indipendente dal problema che li aveva portati alla luce. Tanto che, più di un secolo dopo, Augusta Ada Byron (1815-1852), figlia del famoso poeta, divenuta dopo il matrimonio Contessa di Lovelace, pubblicò il primo programma della storia che si proponeva proprio il calcolo di questi numeri [3]. Quel programma anticipatore dei tempi fu scritto per un progetto di calcolatore meccanico ideato da Charles Babbage (1791-1871) ma, per motivi economici, mai realizzato. Questo è, ai nostri tempi, l'inizio della infinita sequenza dei numeri di Bernoulli:

$$\mathbf{1};\ \pm\tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}};\ \tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}};\ \mathbf{0};\ -\tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{30}};\ \mathbf{0};\ \tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{42}};\ \mathbf{0};\ -\tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{30}};\ \mathbf{0};\ \tfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{66}};\ \mathbf{0};\ -\tfrac{\mathbf{691}}{\mathbf{2730}};\ \mathbf{0};\ \tfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{6}};\ \mathbf{0};\ -\tfrac{\mathbf{3617}}{\mathbf{510}};\ \mathbf{0}\ ...$$

Ai tempi di Bernoulli e di Babbage invece i primi due della sequenza non erano ancora stati considerati [4]. Comunemente questi numeri si indicano con B_j dove l'indice intero parte da zero. Quella con $B_1 = -\frac{1}{2}$ è la variante più comune

ma a volte conviene invece, considerare la variante con $B_1 = \frac{1}{2}$ [5]
Mentre normalmente i numeri di Bernoulli vengono definiti a partire dall'analisi matematica qui voglio introdurre alla possibilità alternativa che si basa su quanto dimostrato nel precedente articolo sulle matrici binomiali[1]. La variante più comune dei numeri di Bernoulli corrisponde alla prima colonna della matrice $G(0,1) = A^{-1}$ di ordine m, intero positivo che può scegliersi grande a piacere. La seconda variante dei numeri bernoulliani, quella con $+\frac{1}{2}$, corrisponde invece alla prima colonna della matrice $G(1,1) = \overline{A}^{-1}$. Indicheremo i vettori corrispondenti alle due colonne rispettivamente con $\vec{B}(0)$ e $\vec{B}(1)$ Vedremo come generalizzare queste due sequenze numeriche ed anche la formula di Faulhaber. Estenderemo a un numero h qualsiasi questi vettori. Per quanto riguarda le componenti ci uniformeremo all'uso di iniziare da zero. La generica componente al variare del numero di riga sarà quindi:$[B(h)]_{r-1}$ o più semplicemente $B_{r-1}(h)$ Chi ci assicura che i numeri delle nostre matrici coincidono in tutto e per tutto con le infinite sequenze bernoulliane? Moltiplicando la matrice A per la prima colonna di $G(0,1)$, contenente i numeri di Bernoulli, otteniamo $\vec{V}(0)$ la prima colonna dell'elemento neutro delle matrici cioè un vettore di tutti zeri tranne il primo elemento:

$$A\vec{B}(0) = \vec{V}(0) \quad \text{o anche} \quad \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k-1} [B(0)]_{k-1} = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 1 \\ 0 & \text{se } k > 1 \end{cases}$$

Considerando i numeri di Bernoulli come incognite ciò ci permette di scrivere facili equazioni lineari che ogni volta aggiungono una nuova variabile.

$$\begin{array}{c|c} 1B_0 = 1 & B_0 = 1 \\ 1B_0 + 2B_1 = 0 & B_1 = -\frac{1}{2}(1B_0) \\ 1B_0 + 3B_1 + 3B_2 = 0 & B_2 = -\frac{1}{3}(1B_0 + 3B_1) \\ 1B_0 + 4B_1 + 6B_2 + 4B_3 = 0 & B_3 = -\frac{1}{4}(1B_0 + 4B_1 + 6B_2) \end{array}$$

Il sistema si risolve facilmente per sostituzione partendo dalla più semplice $B_0 = 1$ e continuando ottenendo ogni volta un nuovo valore in funzione dei precedenti. Il tutto si può sintetizzare, per $m > 0$ con una formula cosiddetta ricorsiva:

$$B_m = -\frac{1}{m+1} \sum_{k=1}^{m} \binom{m+1}{k-1} B_{k-1}$$

Questa relazione tra coefficienti binomiali e numeri di Bernoulli è quella più comune e ci garantisce che abbiamo a che fare proprio con questi numeri. Anche se non sembra, per via della differente notazione legata ai tempi, questa formula è quella che fu utilizzata dalla giovane Ada nel suo famoso programma [4]. La troviamo nei suoi scritti [3] dimostrata con l'analisi matematica seguendo la via aperta da Carl Jacobi (1805-1851) che, pochi anni prima era riuscito a dimostrare la formula di Faulhaber [6] di cui questa formula è un caso particolare. Esistono anche altre formule per ricavare questi numeri ma sono molto più complicate. Utilizzando una particolare matrice binomiale da me scoperta (o riscoperta), indagando sul legame tra la matrice A e la sua inversa, presento la formula individuata attraverso un esempio: [7]:

$$H = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 28 & 56 & 70 & 56 & 28 & 8 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & 36 & 84 & 126 & 126 & 84 & 36 & 9 & 0 \\ 1 & 10 & 45 & 120 & 210 & 252 & 210 & 120 & 45 & 10 \\ 1 & 11 & 55 & 165 & 330 & 462 & 462 & 330 & 165 & 55 \end{vmatrix} = 3024000$$

L'ordine della matrice binomiale quasi triangolare (matrice di Hessemberg) di cui si deve calcolare il determinante è pari all'indice del numero di Bernoulli

$$B_{10} = \frac{H}{11!} = \frac{3024000}{39916800} = \frac{5}{66}$$

Infine ricordando che le matrici G(0,1) e G(1,1) devono essere in relazione di alternanza e che, nella prima colonna, differiscono solo per il valore della seconda riga che caratterizza e differenzia le due sequenze bernoulliane, si deduce che tutti gli altri valori che dovrebbero cambiare segno da una colonna all'altra non possono farlo e che dunque devono valere 0 essendo questo l'unico numero a essere invariante per cambiamento di segno.

4 La formula di Faulhaber

Abbiamo visto come la matrice $G(1,1) = T(1,1)A^{-1} = \overline{A}^{-1}$ risolve il problema di determinare i polinomi per il calcolo delle somme di interi successivi. Quale regolarità riuscirono allora a scoprire Faulhaber e Bernoulli per ottenere quegli stessi polinomi? Come ragionarono esattamente, probabilmente, non lo sapremo mai ma si può evidenziare la regola scoperta con un artificio didattico che, come una specie di spettroscopio, scompone la $G(1,1)$ in matrici dalla crescita facilmente prevedibile :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & 0 \\ 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{30} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{30} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

L'operazione che lega queste tre matrici non è l'ordinario prodotto righe per colonna ma il prodotto di Hadamard, un operazione tra matrici molto più semplice e veloce consistente nel moltiplicare tra loro gli elementi corrispondenti. Per esempio per trovare l'elemento risultante all' incrocio della quinta riga e della prima colonna dobbiamo moltiplicare $\frac{1}{5}5(-\frac{1}{30}) = -\frac{1}{30}$. Si verifica facilmente che il prodotto finale dà proprio la nostra $G(1,1)$ di ordine 6. In questo modo prevedere la matrice degli ordini superiori diventa molto più facile richiedendo soltanto la conoscenza dei numeri di Bernoulli. La prima infatti è facilmente prevedibile dato che ogni riga presenta un'unità frazionaria successiva. La seconda è una matrice binomiale che ricorda la A ma il triangolo di Tartaglia non manca dell'ultimo ma del primo elemento di ogni riga. E la terza matrice? La terza matrice nella prima colonna ha le componenti di $\vec{B}(1)$ cioè i numeri di bernulli nella variante con $+\frac{1}{2}$ come secondo elemento. Osservando poi le altre colonne si nota la stessa sequenza in ritardo via via maggiore. Questa struttura ripetitiva la classifica come una matrice di Toeplitz. Moltiplicando, elemento per elemento, queste tre matrici, troviamo la regola scoperta da Bernoulli! [2] Ecco dunque, in forma didattica, la matrice dei coefficienti polinomiali suggerita dalla formula di Faulhaber:

$$\begin{bmatrix}
\frac{1}{1}\binom{1}{1}B_0(1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2}\binom{2}{1}B_1(1) & \frac{1}{3}\binom{2}{2}B_0(1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{3}\binom{3}{1}B_2(1) & \frac{1}{3}\binom{3}{2}B_1(1) & \frac{1}{3}\binom{3}{3}B_0(1) & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{4}\binom{4}{1}B_3(1) & \frac{1}{4}\binom{4}{2}B_2(1) & \frac{1}{4}\binom{4}{3}B_1(1) & \frac{1}{4}\binom{4}{4}B_0(1) & 0 & 0 \\
\frac{1}{5}\binom{5}{1}B_4(1) & \frac{1}{5}\binom{5}{2}B_3(1) & \frac{1}{5}\binom{5}{3}B_2(1) & \frac{1}{5}\binom{5}{4}B_1(1) & \frac{1}{5}\binom{5}{5}B_0(1) & 0 \\
\frac{1}{6}\binom{6}{1}B_5(1) & \frac{1}{6}\binom{6}{2}B_4(1) & \frac{1}{6}\binom{6}{3}B_3(1) & \frac{1}{6}\binom{6}{4}B_2(1) & \frac{1}{6}\binom{6}{5}B_1(1) & \frac{1}{6}\binom{6}{6}B_0(1)
\end{bmatrix} \tag{2}$$

Lasciamo ai lettori più volenterosi il compito in teoria semplice ma in pratica difficoltoso di dimostrarla. Si tratterebbe di mostrare che la matrice in questa form, moltiplicata per $\overline{A}$ dà U, la matrice elemento neutro. Per l'unicità dell'inversa si sarà così dimostrato che questa coincide necessariamente con $G(1,1)$ per ogni ordine m. Se ora moltiplichiamo la matrice precedente per $n\vec{V}(n)$ con $m = 6$ componenti $(n\ n^2 n^3 n^4 n^5 n^6)$, otteniamo i seguenti sei polinomi calcolanti somme di potenze:

$\frac{1}{1}\binom{1}{1}B_0(1)n = \sum_{k=1}^{n} k^0$

$\frac{1}{2}\binom{2}{1}B_1(1)n + \frac{1}{2}\binom{2}{2}B_0(1)n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^1$

$\frac{1}{3}\binom{3}{1}B_2(1)n + \frac{1}{3}\binom{3}{2}B_1(1)n^2 + \frac{1}{3}\binom{3}{3}B_0(1)n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^2$

$\frac{1}{4}\binom{4}{1}B_3(1)n + \frac{1}{4}\binom{4}{2}B_2(1)n^2 + \frac{1}{4}\binom{4}{3}B_1(1)n^3 + \frac{1}{4}\binom{4}{4}B_0(1)n^4 = \sum_{k=1}^{n} k^3$

$\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{5}\binom{5}{k}B_{5-k}(1)n^k = \sum_{k=1}^{n} k^4$

$\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6}\binom{6}{k}B_{6-k}(1)n^k = \sum_{k=1}^{n} k^5$

facilmente generalizzabile in

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}B_{m-k}(1)n^k = \sum_{k=1}^{n} k^{m-1}$$

Questa è una delle forme in cui può presentarsi la formula di Faulhaber usando i numeri di Bernoulli nella variante con $+\frac{1}{2}$. I più però si ostinano ancora ad usare i numeri di Bernoulli nella variante negativa per cui appesantiscono inutilmente la formula con un fattore (-1) elevato a potenza che ha lo scopo di cambiare segno a $-\frac{1}{2}$. Questo artificio però, come effetto collaterale, cambia inutilmente segno a tanti altri addendi che però, valendo zero, non se ne avvedono, restando uguali a se stessi. Tutto ciò però, dal nostro punto di vista, appare innaturale perchè i numeri di Bernoulli della variante più diffusa sono relativi al calcolo della somma delle potenze dei numeri naturali inizianti da zero non da uno.

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}B_{m-k}(0)n^k = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}B_{m-k}n^k = \sum_{k=0}^{n-1} k^{m-1}$$

Nel secondo passaggio abbiamo sottinteso il valore $h = 0$ da cui dipendono i numeri di Bernoulli del primo tipo. Se è vero che ciò semplifica la formula è anche vero che nasconde possibili generalizzazioni come questa dove h non è né 0 né 1 ma 2:

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}B_{m-k}(2)n^k = \sum_{k=2}^{n+1}k^{m-1} = \sum_{k=0}^{n-1}(2+k)^{m-1}$$

Bisogna chiarire però quale sia il vettore $\vec{B}(2)$ e quali le sue componenti numeriche che farebbero pensare ad una terza variante dei numeri bernoulliani! La risposta per analogia è semplice: si tratta della prima colonna della matrice $G(2,1)$. Ed è proprio così ma per capire meglio dovremo introdurre i polinomi di Bernoulli che, come vedremo, sono una vera e propria estensione dei numeri bernoulliani. Prima però è necessaria una conoscenza un po' più approfondita delle matrici T(h,p) di un dato ordine m.

5 Gruppi binomiali

5.1 T(h,p), prodotto righe per colonne

L'insieme delle matrici $T(h,p)$ per $p \neq 0$ rispetto al prodotto righe per colonne forma un gruppo non commutativo isomorfo a quello della composizione di funzioni lineari ad una variabile
Abbiamo già visto nel precedente articolo [1] che

$$T(h,p)\vec{V}(x) = \vec{V}(h+px)$$

La matrice $T(h,p)$ induce quindi una trasformazione lineare sulla variabile del vettore di Vandermonde per cui si moltiplica. Il prodotto di due matrici di questo tipo corrisponde alla composizione di due funzioni lineari. Risulta

$$T(a,b)T(c,d) = T(a+bc, bd)$$

infatti per l'associatività del prodotto tra matrici abbiamo $T(a,b)T(c,d)\vec{V}(x) = T(a,b)\vec{V}(c+dx) = \vec{V}(a+b(c+dx)) = \vec{V}(a+bc+bdx) = T(a+bc,bd)\vec{V}(x)$.
$T(0,1) = U$ è l'elemento neutro quindi l'inverso di $T(a,b)$ è $T(-\frac{a}{b}, \frac{1}{b})$
Data la regola del prodotto appena mostrata sussiste la seguente identità:

$$T(h,p) = T(h,1)T(0,p) = T(0,p)T(\frac{h}{p}, 1)$$

questa sarà molto utile per esprimere la matrice $G(h,p)$ in una forma bernoulliana generalizzante la formula di Faulhaber. Vedremo tra breve che questa identità potrà anche essere scritta come $T(h,p) = T^h W_p = W_p T^{\frac{h}{p}}$

5.1.1 Sottogruppo delle potenze di T

L'insieme delle matrici $T(h,1)$ che indicheremo anche con T^h rispetto al prodotto tra matrici forma un gruppo abeliano isomorfo alla ordinaria somma numerica
Infatti:
$T^1 = T \quad T^hT^{-h} = T^0 = U \quad T^hT^q = T^qT^h = T^{h+q} \quad (T^aT^b)T^c = T^a(T^bT^c)$
Da notare che questa definizione ci permette di calcolare potenze come $T^2 = TT$ anche senza dover fare il prodotto righe per colonne. Ugualmente ci permette di elevare T a esponenti razionali, reali e perfino complessi.

5.1.2 Sottogruppo delle matrici diagonali

Anche le matrici diagonali T(0,p) che indicheremo anche con W_p formano un gruppo abeliano. Queste sono formate da tutti zeri eccetto la diagonale principale che imita un vettore di Vandermonde: $(1\ p\ p^2\ ...\ p^m)$
Esempi: $W_pW_q = W_{pq} \quad W_1 = U \quad W_pW_{\frac{1}{p}} = U$

6 Polinomi di Bernoulli

Per quanto visto precedentemente possiamo riscrivere la matrice dei coefficienti dei polinomi per somma di potenze con basi in progressione aritmetica come segue:

$$G(h,p) = W_pT^{\frac{h}{p}}A^{-1} \tag{3}$$

Poniamo per brevità $x = \frac{h}{p}$ e concentriamoci sul prodotto T^xA^{-1} anzi, per semplicità, solo su una sua parte, il prodotto della matrice T^x per la prima colonna di A^{-1} contenente i numeri di Bernoulli che indicheremo nella notazione semplificata più diffusa. Farò un esempio scegliendo ordine m=4:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 \\ x^2 & 2x & 1 & 0 \\ x^3 & 3x^2 & 3x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_0 \\ B_0x + B_1 \\ B_0x^2 + 2B_1x + B_2 \\ B_0x^3 + 3B_1x^2 + 3B_2x + B_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ x - \frac{1}{2} \\ x^2 - x + \frac{1}{6} \\ x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \end{bmatrix}$$

Sostituendo i rispettivi valori ai primi quattro numeri di Bernoulli abbiamo ottenuto quattro polinomi di grado via via crescente $B_0(x)$ $B_1(x)$ $B_2(x)$ $B_3(x)$. Altri potremmo trovarne per continuare la serie. Generalizzando abbiamo:

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k x^{n-k}$$

Potremmo usare questa equazione per definire i polinomi di Bernoulli. Invece tradizionalmente questi, come gli omonimi numeri, si definiscono partendo dallo sviluppo in serie di funzioni generatrici. Si dimostra poi, tra varie proprietà, che vale questa proprietà di traslazione che, per y=0 coincide con la nostra:

$$B_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k(y) x^{n-k} \tag{4}$$

Possiamo dunque riscrivere l'esempio precedente così:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 \\ x^2 & 2x & 1 & 0 \\ x^3 & 3x^2 & 3x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0(0) \\ B_1(0) \\ B_2(0) \\ B_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_0(x) \\ B_1(x) \\ B_2(x) \\ B_3(x) \end{bmatrix}$$

Generalizzando avremo $T^x\vec{B}(0) = \vec{B}(x)$ con $\vec{B}(x)$ il vettore che ha per componenti i polinomi di Bernoulli calcolati in x. Per arrivare alla 4 basta considerare $T^xT^y\vec{B}(0)$ e associare diversamente le matrici ottenendo $\vec{B}(x+y) = T^x\vec{B}(y)$ Dunque non esistono solo $\vec{B}(0)$ e $\vec{B}(1)$, numeri di Bernoulli e sua variante. Esistono infinite sequenze per x intero positivo, negativo, reale o complesso che sia.

Naturalmente quanto mostrato per la prima colonna di A^{-1} vale anche per tutte le altre colonne che, come sappiamo, hanno gli stessi numeri di Bernoulli moltiplicati per costanti. Queste potranno essere messe in evidenza riproducendo la stessa situazione che abbiamo incontrato nella moltiplicazione per la prima colonna.

7 Generalizzazione della Formula di Faulhaber

Tenendo presente che quando la ragione della progressione aritmetica è p=1 il fattore W_p presente nella 3 diventa elemento neutro del prodotto matriciale, possiamo riscrivere la 2 sostituendo x a 1 nell'argomento dei polinomi di Bernoulli:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{1}\binom{1}{1}B_0(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\binom{2}{1}B_1(x) & \frac{1}{3}\binom{2}{2}B_0(x) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3}\binom{3}{1}B_2(x) & \frac{1}{3}\binom{3}{2}B_1(x) & \frac{1}{3}\binom{3}{3}B_0(x) & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4}\binom{4}{1}B_3(x) & \frac{1}{4}\binom{4}{2}B_2(x) & \frac{1}{4}\binom{4}{3}B_1(x) & \frac{1}{4}\binom{4}{4}B_0(x) & 0 & 0 \\ \frac{1}{5}\binom{5}{1}B_4(x) & \frac{1}{5}\binom{5}{2}B_3(x) & \frac{1}{5}\binom{5}{3}B_2(x) & \frac{1}{5}\binom{5}{4}B_1(x) & \frac{1}{5}\binom{5}{5}B_0(x) & 0 \\ \frac{1}{6}\binom{6}{1}B_5(x) & \frac{1}{6}\binom{6}{2}B_4(x) & \frac{1}{6}\binom{6}{3}B_3(x) & \frac{1}{6}\binom{6}{4}B_2(x) & \frac{1}{6}\binom{6}{5}B_1(x) & \frac{1}{6}\binom{6}{6}B_0(x) \end{bmatrix}$$

Quando x=1 questa matrice ci dà $G(1,1)$, come già visto, con i coefficienti dei primi sei polinomi per il calcolo delle somme di n interi successivi inizianti da 1:
$\sum_{k=1}^{n} k^{r-1} = \sum_{k=0}^{n-1}(1+k)^{r-1}$ per $r = 1...m$
Per $x = 2$ ci dà analoghi polinomi per somme inizianti da 2:
$\sum_{k=2}^{n+1} k^{r-1} = \sum_{k=0}^{n-1}(2+k)^{r-1}$ per $r = 1...m$
Potendo x essere un numero anche non intero la sommatoria di potenze deve necessariamente essere espressa nella seconda delle forme alternative date.
Avremo quindi la formula di Faulhaber generalizzata ad una qualsiasi progressione aritmetica di ragione 1:

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}B_{m-k}(x)n^k = \sum_{k=0}^{n-1}(x+k)^{m-1}$$

Il passo successivo consiste nel considerare il fattore W_p quand p non è 1. La precedente matrice va quindi moltiplicata a sinistra per la matrice diagonale. Il risultato non presenta difficoltà di calcolo. Le potenze di p si distribuiscono alle varie righe dando G(h,p) in questa forma:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{1}\binom{1}{1}B_0(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{p}{2}\binom{2}{1}B_1(x) & \frac{p}{3}\binom{2}{2}B_0(x) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{p^2}{3}\binom{3}{1}B_2(x) & \frac{p^2}{3}\binom{3}{2}B_1(x) & \frac{p^2}{3}\binom{3}{3}B_0(x) & 0 & 0 & 0 \\ \frac{p^3}{4}\binom{4}{1}B_3(x) & \frac{p^3}{4}\binom{4}{2}B_2(x) & \frac{p^3}{4}\binom{4}{3}B_1(x) & \frac{p^3}{4}\binom{4}{4}B_0(x) & 0 & 0 \\ \frac{p^4}{5}\binom{5}{1}B_4(x) & \frac{p^4}{5}\binom{5}{2}B_3(x) & \frac{p^4}{5}\binom{5}{3}B_2(x) & \frac{p^4}{5}\binom{5}{4}B_1(x) & \frac{p^4}{5}\binom{5}{5}B_0(x) & 0 \\ \frac{p^5}{6}\binom{6}{1}B_5(x) & \frac{p^5}{6}\binom{6}{2}B_4(x) & \frac{p^5}{6}\binom{6}{3}B_3(x) & \frac{p^5}{6}\binom{6}{4}B_2(x) & \frac{p^5}{6}\binom{6}{5}B_1(x) & \frac{p^5}{6}\binom{6}{6}B_0(x) \end{bmatrix}$$

A questo punto basta ricordare che $x = \frac{h}{p}$ per ottenere la formula di Faulhaber generalizzata ad ogni progressione aritmetica:

$$\frac{p^{m-1}}{m}\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}B_{m-k}(\frac{h}{p})n^k = \sum_{k=0}^{n-1}(h+pk)^{m-1}$$

Se poi non interessano direttamente i coefficienti dei polinomi calcolanti ma solo il risultato della somma di potenze si può applicare a quest'ultima equazione la proprietà di traslazione dei polinomi di Bernoulli (4) per cui risulta $B_m(\frac{h}{p}+n) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} B_{m-k}(\frac{h}{p}) n^k$ ed ottenere una forma più semplice [9]:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (h+pk)^{m-1} = \frac{p^{m-1}}{m} \left(B_m(\frac{h}{p}+n) - B_m(\frac{h}{p}) \right)$$

8 Relazione analitica tra i polinomi G(0,1) e i polinomi di Bernoulli

Termino questa introduzione ai numeri di Bernoulli presentando una relazione che mi sembra non priva di interesse. Come abbiamo visto i polinomi i cui coefficienti sono in $G(0,1)$ vengono espressi dalla formula di Faulhaber. Omettendo l'argomkento 0 per esprimere più semplicemente i numeri di Bernoulli e ricordando che $\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$ si ha:

$$\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} B_{m-k} n^k = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{m} \binom{m}{k} B_{m-k} n^k = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} \binom{m-1}{k-1} B_{m-k} n^k$$

Se ora deriviamo rispetto a n Il nostro m-esimo polinomio, per la solita proprietà di traslazione, otteniamo

$$\sum_{k=1}^{m} \binom{m-1}{k-1} B_{m-k} n^{k-1} = B_{k-1}(n)$$

Abbiamo così dimostrato che derivando i polinomi per il calcolo delle somme di n potenze inizianti da zero si ottengono i polinomi di Bernoulli. Utilizzando le matrici ciò si può esprimere scrivendo $EN^{-1} = A^{-1}$ oppure passando alle inverse $NE^{-1} = A$ dove N è una matrice diagonale (1 2 3 .. m) e E è la matrice triangolare con i coefficienti dei polinomi bernoulliani.

9 Bibliografia

Riferimenti bibliografici

[1] Giorgio Pietrocola, Matrici binomiali per il calcolo di somme potenze, Archimede 4,2021

[2] Jacob Bernoulli,Summae potestatum in Artis conjectandi, Internet Archive p.97, 1713

[3] Ada Lovelace Note G, in Luigi Manabrea, "Sketch the analitycal engine invented by Charles Babbage",Ginevra, 1842

[4] Giorgio Pietrocola, Internet e l'algoritmo di Ada Byron, contessa di Lovelace e incantatrice di numeri, Maecla, 2017

[5] OEIS Enciclopedia delle sequenze dei numeri interi

- A027641, Sequenza dei numeratori della variante dei numeri di Bernoulli con $B_1 = -\frac{1}{2}$
- A164555 , Sequenza dei numeratori nella variante dei numeri di Bernoulli con $B_1 = \frac{1}{2}$

[6] Carl Jacobi, De usu legitimo formulae summatoriae Maclaurinianae. Journal für die reine und angewandte Mathematik. 12. pp. 263–72.,1834

[7] Giorgio Pietrocola, Esplorando un antico sentiero: teoremi sulle somme di potenze di interi successivi,Maecla,1°parte 2008 2°parte 2019

[8] Giorgio Pietrocola, On polynomials for the calculation of sums of powers of successive integers and Bernoulli numbers deduced from Pascal's arithmetical triangle.www.pietrocola.eu, 2017

[9] Bazso and Mezo, On the coefficients of power sums of arithmetic progressions, Journal of Number Theory, 2015