Sulla formula usata per scrivere il primo programma per elaboratore della storia

di Giorgio Pietrocola
giorgio.pietrocola[at]gmail.com
6 Luglio 2017

Indice

1.Introduzione

Il primo programma per elaboratore della storia si proponeva di collaudare la potenza di una innovativa macchina programmabile, la macchina analitica, progettata da Charles Babbage (Londra 1791-Londra 1871). Una macchina calcolatrice programmabile che avrebbe potuto anticipare di un secolo l'era informatica ma che, per motivi economici, non fu mai costruita se non recentemente per il museo della scienza di Londra. Lo scopo del programma era di ottenere dalla macchina quanti più possibili numeri di Bernoulli. Questa serie infinita di numeri sconosciuti nell'antichità, furono presentati al mondo con la pubblicazione nel 1713 dell'opera postuma ”Ars Conjectandi” [1] di Jacob Bernoulli (Basilea 1654 - Basilea 1705). Erano serviti a Jacob per scrivere la formula che risolveva, nel caso generale, il problema della somma di potenze di interi successivi.

$$\sum_{k=1}^{n} k^m = \frac{1}{m+1} n^{m+1} + \frac{1}{2} n^m + \sum_{k=2}^{n} \frac{B_k}{k!} m^{\underline{k-1}} n^{m-k+1}$$

Come si vede i coefficienti del polinomio con cui si poteva arrivare al calcolo della somma erano espressi in funzione di questi numeri. Molti autori chiamano questa uguaglianza valida per ogni m formula di Faulhaber anche se Jhoann Faulhaber (Ulma 1580-Ulma 1635) pur dando un notevole contributo in numerosi casi particolari, fino alla diciassettesima potenza, non risolse il caso generale e non è chiaro se per i suoi risultati in qualche modo si sia giovato o meno dei numeri che portano giustamente il nome del Bernoulli [3]. I numeri scoperti da Jacob iniziavano da ⅙ e alternandosi con degli zeri continuavano con frazioni a volte positive a volte negative difficilmente prevedibili. Paradossalmente oggi si preferisce far precedere la sequenza indicata da Jacob con due numeri da lui ignorati. Il primo è 1, il secondo può essere tanto ½ che -½ a secondo della variante che di volta in volta conviene prendere in considerazione. Ai tempi di Ada però ancora non si consideravano come numeri di Bernoulli questi due numeri che oggi indichiamo con B_0 e B_1. La sequenza riconosciuta era quindi:

$$\frac{1}{6} \quad 0 \quad -\frac{1}{30} \quad 0 \quad \frac{1}{42} \quad 0 \quad -\frac{1}{30} \quad 0 \quad \frac{5}{66} \quad 0 \quad \ldots$$

e simbolicamente si indicava con B_1 B_2 B_3 B_4 …

2. La formula di Ada

Chi scrisse nel 1842 quel primo programma fu una valente matematica collaboratrice di Baggage, Ada Lovelace. Questa fu la formula che usò per il suo programma:

$$0 = -\frac{1}{2}\frac{2m-1}{2m+1} + B_2\frac{2m}{2} + B_4\frac{2m(2m-1)(2m-2)}{4!} +$$

$$+B_6\frac{2m(2m-1)(2m-2)(2m-3)(2m-4)}{6!} + \ldots + B_{2m}$$

Ada Byron (Londra 1815-Londra 1852), figlia legittima del noto

poeta romantico Lord Byron che non vedrà mai e di Annabella Millbanke, appassionata cultrice di matematica, crebbe allevata solo dalla madre che le diede un'ottima educazione. A Londra fu seguita da matematici di primo piano, come Mary Sommerville e Augustus De Morgan, che ne apprezzarono incoraggiarono capacità e talento. La giovane, sposatasi all'età di venti anni con William King-Noel da cui ebbe tre figli e il titolo di contessa di Lovelace, pubblicò il suo programma tra le ponderose note che accompagnarono la sua traduzione dal francese in inglese del testo di Luigi Manebrea "*Notions sur la machine analytique de Charles Babbage*" che fu pubblicato a Ginevra nel 1842 [2].
Nella sua nota G disponibile in rete in lingua inglese Ada ci presenta la formula che abbiamo riportato. Solo che noi abbiamo preferito tradurre i suoi B_1 B_3 B_5 nel linguaggio attuale. Volendo esprimere la sua formula in modo compatto, servendoci della notazione relativa al fattoriale discendente, possiamo anche scrivere:

$$0 = -\frac{1}{2}\frac{2m-1}{2m+1} + \sum_{k=1}^{m} \frac{(2m)^{\underline{2k-1}}}{(2k)!} B_{2k}$$

Ada nella sua nota ci informa di aver scelto questa formula tra alcune alternative, allo scopo di evidenziare le potenzialità della macchina. Ci indica anche come la formula possa essere ricavata partendo dalla funzione generatrice dei numeri di Bernoulli, lo sviluppo in serie di Maclaurin della funzione esponenziale:

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{1}{2}x + \sum_{n=2}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$$

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$$

La differenza tra le due espressioni dipende dalla considerazione o meno dei primi due numeri della sequenza bernoulliana.

3. Prima alternativa: caso particolare

Prima di seguire Ada nella strada da lei indicata, strada piuttosto laboriosa e non priva di insidie dovendosi estendere le operazioni ordinarie tra polinomi a serie infinite di potenze, vorrei evidenziare e riflettere su alcune strade alternative da me individuate. La prima alternativa per giustificare la formula, come si può facilmente verificare, consiste nel far notare che la formula scelta non è altro che quella indicata da Jacob Bernoulli nel caso particolare in cui n=1. Infatti sostituendo si ha:

$$1 = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{m} \frac{B_k}{k!} m^{\underline{k-1}}$$

$$0 = \frac{1}{m+1} - \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{m} \frac{m^{\underline{k-1}}}{k!} B_k$$

Da qui alla formula di Ada il passo è assai breve. Infatti otteniamo:

$$0 = -\frac{1}{2}\frac{m-1}{m+1} + \sum_{k=2}^{m} \frac{m^{\underline{k-1}}}{k!} B_k$$

che differisce da quella effettivamente usata solo per il fatto che la sommatoria include anche gli addendi nulli per via del fatto che i B_k con indice dispari superiore a uno valgono sempre 0. Un calcolo inutile giustamente evitato dal programma descritto nella nota G. Proseguiamo invece dal penultimo passaggio con l'intento di identificare la formula, dato che così come si presenta sembra oggi non presente nei vari trattati che si occupano di questi numeri. Dunque, mettendo in gioco gli attuali B_0=1 e B_1=-½ e ricollegandoci al penultimo passaggio possiamo scrivere:

$$0 = \frac{1}{m+1} B_0 + B_1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{m^{\underline{k-1}}}{k!} B_k$$

In pochi passaggi

$$0=\frac{1}{m+1}\binom{m+1}{0}B_0+\frac{1}{m+1}\binom{m+1}{1}B_1+\frac{1}{m+1}\sum_{k=2}^{m}\frac{(m+1)m^{\underline{k-1}}}{k!}B_k$$

$$0=\frac{1}{m+1}\binom{m+1}{0}B_0+\frac{1}{m+1}\binom{m+1}{1}B_1+\frac{1}{m+1}\sum_{k=2}^{m}\binom{m+1}{k}B_k$$

si arriva alla formula da cui facilmente si ricava quella ricorsiva più semplice comunemente inclusa nei trattati odierni (valida per m>0)

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k}B_k=0$$

che quindi coincide nella sostanza con quella scelta e usata da Ada.
Sappiamo che Ada sui numeri di Bernoulli si era consultata con i migliori matematici inglesi del tempo. Come mai ha preferito spiegare la sua formula mediante la funzione generatrice che a sua volta necessiterebbe di spiegazioni? Io credo che non abbia ritenuto opportuno spiegare ciò che era ben noto da molto tempo alla sua epoca. Bernoulli non era stato in grado di dimostrare la formula che aveva rivelato e per anni quel caso particolare da me riscoperto sarà servito ai matematici come unica formula ricorsiva per individuare e per definire quei numeri. Solo pochi anni prima della descrizione di Ada, nel 1834 Carl Jacobi (Postdam 1804-Berlino 1851) era riuscito finalmente a dimostrare la formula pubblicata da Bernoulli. A quanto sembra (anche se non ho ancora potuto consultare direttamente questa fonte [6]), seguendo la via analitica . Dunque Ada informata delle novità avrebbe preferito collegare la sua formula alla nuova strada che si era aperta, quella basata sull'analisi matematica, la stessa che avrebbe permesso quella dimostrazione.

4. Seconda alternativa: la matrice inversa

Qui presenterò un'altra scoperta (o forse riscoperta) [4] che avrebbe permesso una spiegazione alternativa di quella formula ricorsiva.
Ripartiamo dall'*Ars Conjectandi* di Jacob Bernoulli pag.97 [1]:

... Atque si porrò ad altiores gradatim potestates pergere, levique negotio sequentem adornare laterculum licet :

Summae Potestatum

$\int n = \frac{1}{2}nn + \frac{1}{2}n$

$\int nn = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}nn + \frac{1}{6}n$

$\int n^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}nn$

$\int n^4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$

$\int n^5 = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}nn$

$\int n^6 = \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n$ $\qquad -\frac{3}{20}$

$\int n^7 = \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{1}{12}nn$

$\int n^8 = \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \frac{2}{9}n^3 - \frac{1}{30}n$

$\int n^9 = \frac{1}{10}n^{10} + \frac{1}{2}n^9 + \frac{3}{4}n^8 - \frac{7}{10}n^6 + \frac{1}{2}n^4 - \frac{1}{12}nn$

$\int n^{10} = \frac{1}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^9 - 1n^7 + 1n^5 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{5}{66}n$

Quin imò qui legem progressionis inibi attentuis ensperexit, eundem etiam continuare poterit absque his ratiociniorum ambabimus : Sumtâ enim c pro potestatis cujuslibet exponente, fit summa omnium n^c seu

$$\int n^c = \frac{1}{c+1}n^{c+1} + \frac{1}{2}n^c + \frac{c}{2}An^{c-1} + \frac{c\cdot c-1\cdot c-2}{2\cdot 3\cdot 4}Bn^{c-3}$$
$$+\frac{c\cdot c-1\cdot c-2\cdot c-3\cdot c-4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}Cn^{c-5}$$
$$+\frac{c\cdot c-1\cdot c-2\cdot c-3\cdot c-4\cdot c-5\cdot c-6}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}Dn^{c-7}\ldots \text{\& ita deinceps,}$$

exponentem potestatis ipsius n continué minuendo binario, quosque perveniatur ad n vel nn. Literae capitales A, B, C, D & c. ordine denotant coëfficientes ultimorum terminorum pro $\int nn$, $\int n^4$, $\int n^6$, $\int n^8$, & c. nempe

$$A = \frac{1}{6}, B = -\frac{1}{30}, C = \frac{1}{42}, D = -\frac{1}{30}.$$

Come si vede è stato necessario correggere un coefficiente dei polinomi errato, probabilmente per un errore di stampa d'epoca. I polinomi nella pagina iniziano dall'esponente uno ma noi possiamo iniziare dall'esponente zero e includere il monomio n.
I coefficienti risultanti, ordinati per grado da sinistra verso destra possono essere riassunti dalla seguente matrice triangolare:

$$G_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{30} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{12} & 0 & \frac{5}{12} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{42} & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & 0 & -\frac{7}{24} & 0 & \frac{7}{12} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{30} & 0 & \frac{2}{9} & 0 & -\frac{7}{15} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{20} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{7}{10} & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{5}{66} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{11} \end{pmatrix}$$

Notare che nella prima colonna compaiono i coefficienti dei monomi di primo grado che sono i numeri di Bernoulli nella variante $B_1=½$.
Ciò che scoprii ormai molti anni fa è che invertendo questa matrice si ottiene qualcosa di sorprendente [4] :

$$G_{11}^{-1} = \overline{A}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -6 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 10 & -10 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & -15 & 20 & -15 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & 21 & -35 & 35 & -21 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & -28 & 56 & -70 & 56 & -28 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -9 & 36 & -84 & 126 & -126 & 84 & -36 & 9 & 0 & 0 \\ -1 & 10 & -45 & 120 & -210 & 252 & -210 & 120 & -45 & 10 & 0 \\ 1 & -11 & 55 & -165 & 330 & -462 & 462 & -330 & 165 & -55 & 11 \end{pmatrix}$$

come si vede, invertita la matrice, i numeri risultano molto più familiari. Si riconosce il triangolo di Tartaglia a segni alternati privo però dell'ultimo elemento di ogni linea. Essendo due matrici inverse di ordine 11 il loro prodotto dà l'elemento neutro notoriamente costituito da una matrice dello stesso ordine costituita da tutti "0" salvo gli "1" della diagonale principale:

$$G_{11}^{-1} * \overline{A}_{11} = U_{11}$$

Quindi in particolare moltiplicando l'ultima riga della matrice ottenuta con la prima colonna contenente i numeri di Bernoulli abbiamo:

$$\sum_{k=0}^{10} (-1)^k \binom{11}{k} B_k = 0$$

Ora poiché il fattore alternante agisce solo con k dispari e l'unico numero di Bernoulli con indice dispari non nullo è $B_1=½$ (cosa che si può facilmente dimostrare in diversi modi ma che anche Ada aveva dato per scontata), è sufficiente cambiare segno a quest'ultimo. Dunque conviene prendere in considerazione la variante $B_1=-½$ e scrivere più semplicemente:

$$\sum_{k=0}^{10} \binom{11}{k} B_k = 0$$

che come abbiamo mostrato è un caso particolare della formula usata da Ada.
Il caso particolare m=11 è facilmente generalizzabile come vedremo nell'ultimo paragrafo dove verrà dimostrato il Teorema 1A. Prima però illustrerò il percorso indicato nella nota G.

5 La via analitica indicata nella nota G

Nella nota G scritta da Ada [3] viene presentata la formula che abbiamo visto e questa viene giustificata spiegando in che modo si possa ricavare da un particolare sviluppo in serie dove appaiono gli stessi numeri già incontrati da Bernoulli. E' questa la cosiddetta funzione generatrice per i numeri di Bernoulli nella variante con B_1 negativo:

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{B}_n \frac{x^n}{n!}$$

L'uguaglianza è ristretta al caso $x<2\pi$ (raggio di convergenza della serie)
Questa uguaglianza è un notevole risultato dell'analisi matematica.
E' lo sviluppo in serie di Maclaurin. Per questo sviluppo si devono calcolare i valori della funzione e delle derivate successive nel punto x=0 dove tutte queste funzione non sono definite e quindi si devono calcolare i limiti per arrivare a determinare in questo modo i numeri di Bernoulli.
Ma cosa assicura che in questo modo lungo e laborioso usciranno sempre e solo gli stessi numeri incontrati da Bernoulli affrontando tutt'altro problema?
Per dimostrare questa identità seguirò la strada indicata anche da Ada nelle sue note.
Si considera il notissimo sviluppo in serie di Maclaurin della funzione esponenziale:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

e si sostituisce nella funzione generatrice ottenendo:

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots} = \frac{1}{1 + \frac{x^1}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{5!}}$$

Quindi considerando lo sviluppo in serie:

$$\frac{1}{1 + \frac{x^1}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{5!} + \dots} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} B_k$$

da cui

$$1 = (\frac{x^0}{0!}B_0 + \frac{x^1}{1!}B_1 + \frac{x^2}{2!}B_2 + \frac{x^3}{3!}B_3 + \frac{x^4}{4!}B_4 + \ldots)(\frac{x^0}{1!} + \frac{x^1}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x}{5}$$

e moltiplicando i polinomi infiniti:

$$\begin{aligned}
&1 = \\
&= (B_0 + \frac{x^1}{1!1!}B_1 + \frac{x^2}{2!1!}B_2 + \frac{x^3}{3!1!}B_3 + \frac{x^4}{4!1!}B_4 + \ldots) + \\
&+(\frac{x^1}{0!2!}B_0 + \frac{x^2}{1!2!}B_1 + \frac{x^3}{2!2!}B_2 + \frac{x^4}{3!2!}B_3 + \frac{x^5}{4!2!}B_4 + .. \\
&+(\frac{x^2}{0!3!}B_0 + \frac{x^3}{1!3!}B_1 + \frac{x^4}{2!3!}B_2 + \frac{x^5}{3!3!}B_3 + \frac{x^6}{4!3!}B_4 + .. \\
&+(\frac{x^3}{0!4!}B_0 + \frac{x^4}{1!4!}B_1 + \frac{x^5}{2!4!}B_2 + \frac{x^6}{3!4!}B_3 + \frac{x^7}{4!4!}B_4 + .. \\
&+(\frac{x^4}{0!5!}B_0 + \frac{x^5}{1!5!}B_1 + \frac{x^6}{2!5!}B_2 + \frac{x^7}{3!5!}B_3 + \frac{x^8}{4!5!}B_4 + .. \\
&+(\frac{x^5}{0!6!}B_0 + \frac{x^6}{1!6!}B_1 + \frac{x^7}{2!6!}B_2 + \frac{x^8}{3!6!}B_3 + \frac{x^9}{4!6!}B_4 + .. \\
&+ \ldots
\end{aligned}$$

Notare che i monomi dello stesso grado si trovano sulla diagonale.
Con la messa in evidenza delle potenze crescenti si ha:

$$
\begin{aligned}
&1 = B_0 + \\
&+(\frac{1}{0!2!}B_0 + \frac{1}{1!1!}B_1)x + \\
&+(\frac{1}{0!3!}B_0 + \frac{1}{1!2!}B_1 + \frac{1}{2!1!}B_2)x^2 + \\
&+(\frac{1}{0!4!}B_0 + \frac{1}{1!3!}B_1 + \frac{1}{2!2!}B_2 + \frac{1}{3!1!}B_3)x^3 + \\
&+(\frac{1}{0!5!}B_0 + \frac{1}{1!4!}B_1 + \frac{1}{2!3!}B_2 + \frac{1}{3!2!}B_3 + \frac{1}{4!1!}B_4)x^4 + \\
&+(\frac{1}{0!6!}B_0 + \frac{1}{1!5!}B_1 + \frac{1}{2!4!}B_2 + \frac{1}{3!3!}B_3 + \frac{1}{4!2!}B_4 + \frac{1}{5!1!}B_5 \\
&+\dots
\end{aligned}
$$

Utilizzando i coefficienti binomiali e ricordando:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

possiamo scrivere:

$$
\begin{aligned}
&1 = B_0 + \\
&+\frac{1}{2!}(\binom{2}{0}B_0 + \binom{2}{1}B_1)x + \\
&+\frac{1}{3!}(\binom{3}{0}B_0 + \binom{3}{1}B_1 + \binom{3}{2}B_2)x^2 + \\
&+\frac{1}{4!}(\binom{4}{0}B_0 + \binom{4}{1}B_1 + \binom{4}{2}B_2 + \binom{4}{3}B_3+)x^3 + \\
&+\frac{1}{5!}(\binom{5}{0}B_0 + \binom{5}{1}B_1 + \binom{5}{2}B_2 + \binom{5}{3}B_3 + \binom{5}{4}B_4)x^4 + \\
&+\frac{1}{6!}(\binom{6}{0}B_0 + \binom{6}{1}B_1 + \binom{6}{2}B_2 + \binom{6}{3}B_3 + \binom{6}{4}B_4 + \binom{6}{5}B_5 \\
&+\dots
\end{aligned}
$$

Ora è evidente che perché questa uguaglianza sia possibile non solo deve essere B_0=1 ma si devono annullare anche tutti i coefficienti degli infiniti monomi. Dunque per ogni intero m>1 deve essere:

$$\sum_{j=0}^{m} \binom{m+1}{j} B_j = 0$$

che è la legge che abbiamo già incontrato e che ci garantisce che anche con lo sviluppo in serie si ha lo stessa sequenza numerica bernoulliana già osservata da Bernoulli .
Anche se abbiamo preferito non appesantire la notazione specificando qui si intendono i numeri di Bernoulli nella variante negativa.

6. La via matriciale: Teorema 1A

$$\overline{A}_m^{\,-1} = G_m$$

Si dimostra che i coefficienti dei polinomi per il calcolo della somma di n potenze di interi successivi si possono ottenere invertendo una matrice triangolare a segni alterni ricavabile dal triangolo di Tartaglia eliminando l'ultimo elemento di ogni riga.

Gli elementi di questa matrice possono essere definiti nel seguente modo:

$$\overline{A}_m \;:\; \overline{a}_{j,k} = \begin{cases} 0 & \text{se } k > j \\ \binom{j}{k-1}(-1)^{j+k} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

risulta quindi una matrice triangolare in cui compare il triangolo di Tartaglia, a segni alternati, privato dell'ultimo elemento di ogni riga.

La sua diagonale principale risulta perciò formata dalla successione degli interi positivi il cui prodotto (m!) ne dà il determinante .

Si ha:

$$\bar{A}_m * \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} i^0 \\ \sum_{i=1}^{n} i^1 \\ \sum_{i=1}^{n} i^2 \\ \dots \\ \sum_{i=1}^{n} i^{m-1} \end{pmatrix} = \bar{A}_m * \sum_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} i^0 \\ i^1 \\ i^2 \\ \dots \\ i^{m-1} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \bar{A}_m * \begin{pmatrix} i^0 \\ i^1 \\ i^2 \\ \dots \\ i^{m-1} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} i^1 - (i-1)^1 \\ i^2 - (i-1)^2 \\ i^3 - (i-1)^3 \\ \dots \\ i^m - (i-1)^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n^1 \\ n^2 \\ n^3 \\ \dots \\ n^m \end{pmatrix}$$

Nei primi due passaggi si è applicata la proprietà distributiva. Nel terzo,quando si moltiplica la matrice quadrata per il vettore di potenze si ottiene:

$$\sum_{k=1}^{m} a_{j,k} * i^{k-1} = \sum_{k=1}^{j} \binom{j}{k-1} * (-1)^{j+k} * i^{k-1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{j} (-1)^{2k-1} \binom{j}{k-1} * (-1)^{j-k+1} * i^{k-1} =$$

$$= -\sum_{k=1}^{j} \binom{j}{k-1} * (-1)^{j-k+1} * i^{k-1} =$$

$$= -(-i^j + \sum_{k=1}^{j+1} \binom{j}{k-1} * (-1)^{j-k+1} * i^{k-1}) =$$

$$= -(-i^j + (i-1)^j) = i^j - (i-1)^j$$

Dunque si è dimostrato che:

$$\bar{A}_m * \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n i^0 \\ \sum_{i=1}^n i^1 \\ \sum_{i=1}^n i^2 \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n i^{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n^2 \\ n^3 \\ \dots \\ n^m \end{pmatrix}$$

Moltiplicando i due membri a sinistra per l'inversa si ottiene:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n i^0 \\ \sum_{i=1}^n i^1 \\ \sum_{i=1}^n i^2 \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n i^{m-1} \end{pmatrix} = \bar{A}_m^{-1} \begin{pmatrix} n \\ n^2 \\ n^3 \\ \dots \\ n^m \end{pmatrix}$$

E’ dimostrato quindi questo teorema
che fornisce i famosi polinomi per il calcolo della somma di potenze di interi successivi. [5]

12. Bibliografia

1. (La) Jacob Bernoulli, *"Summae potestatum" in "Ars Conjectandi*", p.97, 1713, digitalizzato on-line su Internet Archive
2. (En) Luigi Manabrea, con traduzione e note di Ada Lovelace, "*Sketch the analitycal engine invented by Charles Babbage*", http://www.fourmilab.ch/babbage/sketch.html#NoteG 1842,Ginevra
3. (En) Frank J. Swetz and Victor J. Katz Johann Mathematical treasures: Faulhaber's Accademiae Algebrae, https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/mathematical-treasures-johann-faulhabers-academia-algebrae MMA
4. Giorgio Pietrocola, *Esplorando un antico sentiero: teoremi sulla somma di potenze di interi successivi*, http://www.maecla.it/Matematica/sommapotenze/racconto.htm Maecla, 2008.
5. Giorgio Pietrocola, *Internet e l'algoritmo di Ada Byron, Contessa di Lovelace e incantatrice di numeri*, http://www.maecla.it/Matematica/Internet_e_l_algoritmo_di_Ada_Byron.pdf, Maecla, 2017
6. Jacobi, Carl (1834). "De usu legitimo formulae summatoriae Maclaurinianae". *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. **12**. pp. 263–72.