Mondo Matematico e Dintorni, Vol 4, No 2 (2021), 43-54

I problemi dei tre arcieri

Giorgio Pietrocola
www.pietrocola.eu
giorgio.pietrocola@gmail.com

Sunto
Viene presentato, discusso e risolto in forma didattica "il problema dei tre Arcieri" un problema di calcolo delle probabilità basato sul teorema di Bayes con le sue varie interpretazioni più o meno lecite che ne modificano significativamente svolgimento e risultato.

Keywords: Teorema di Bayes, Interpretazione testo, Problemi calcolo probabilità

1.Enunciazione del problema

Tre frecce vengono lanciate contro un bersaglio da tre arcieri. Poiché i tre arcieri sono a distanza diversa dal bersaglio, si stima in 3/5 la probabilità dell'arciere A di colpire il bersaglio, in 1/2 quella dell'arciere B e in 4/5 quella dell'arciere C.
Se una freccia colpisce il bersaglio, qual è la probabilità che sia dell'arciere A?

1.1. Critica del testo

Normalmente quando comunichiamo, mediante il linguaggio scritto o altro, non specifichiamo sempre ogni cosa.
Questo a rigore sarebbe spesso non solo impresa ardua, ma inutilmente noiosa. Una scena reale è sempre piena di dettagli irrilevanti che, comunicando, è più sensato trascurare che specificare.
Inoltre spesso, per semplificare ulteriormente il messaggio comunicativo, si sottintendono anche cose che non sarebbero irrilevanti, confidando sulla normale capacità immaginativa e ricostruttiva del cervello del ricevente.
Il processo di semplificazione del messaggio, spesso inconsapevole, è per sua natura imperfetto e può lasciare spazio a interpretazioni inaspettate. Diverso è il caso del linguaggio matematico nato proprio per evitare le ambiguità della lingua naturale. Quando si formula un problema però lo si fa, in generale come nel caso specifico, facendo largo uso della lingua naturale. Per questo motivo, se si vuole un solo risultato, e non una discussione per casi, si dovrebbe prestare particolare cura nell'evitare la possibilità di testi ambigui o che possano apparire tali, almeno quando, come nel

problema preso in esame, la risposta può variare significativamente in funzione dell'interpretazione scelta.

1.2. Questioni interpretative

Il testo del problema recita:
Tre frecce vengono lanciate contro un bersaglio da tre arcieri.
Quante frecce in tutto?
Tre o nove?
Sembrerebbe tre perché altrimenti si sarebbe dovuto specificare "da ciascuno dei tre arcieri".
Quanti bersagli? Uno o uno per uno?
Sembrerebbe uno perché si parla di un bersaglio. Sembrerebbe.
Ma se l'esperienza di chi legge, per esempio, risultasse tale da aver sempre constatato che in ogni gioco i lanci degli arcieri sono sempre di tre frecce per volta, non potrebbe credere, in base a una presunta condivisione delle esperienze vissute, che "ciascuno" è sottinteso e le frecce sono nove?
Per evitare equivoci meglio chiarire il più possibile usando qualche parola in più.\\
Nel caso le frecce in questione siano tre, e il bersaglio uno, le frecce vengono lanciate contemporaneamente? Forse no perché potrebbe risultare pericoloso dato che si può presumere che siano tutti e tre allineati sulla linea perpendicolare al bersaglio altrimenti anche l'angolazione oltre la distanza avrebbe influenzato le probabilità stimate. Se no , in quale ordine? Casuale? Dal più vicino al più lontano per motivi di sicurezza? In ordine alfabetico?
Nell'enunciato del problema si legge anche:
Se una freccia colpisce il bersaglio...
Una sola freccia? Cosa sappiamo delle altre?
Possiamo supporre che tutti gli arcieri abbiano terminato di tirare? Si sta parlando della prima freccia che colpirà il bersaglio non ancora colpito?
Le possibilità sono molte, tante che nel 2014 decisi di pubblicare in rete, insieme con Ivana Niccolai, sul sito didattico Maecla, un ipertesto intitolato "Iperproblema dei tre arcieri" nel quale il problema viene risolto in differenti modi a seconda delle risposte date ai chiarimenti richiesti. Qui mostrerò solo i casi che mi sono sembrati più significativi.
Credo che, a rigore, nei limiti del possibile, si dovrebbero prendere alla lettera le informazioni fornite dal problema senza supporre alcunché ma certo ciò non viene sempre spontaneo.
Per finire, un'osservazione sui dati del problema.
Nonostante sia una cosa innaturale per un ricercatore, nelle nostre scuole siamo abituati a vedere i problemi proposti forniti solo dei dati necessari senza nulla di superfluo.

Benché non sia una regola esplicita e neanche una buona regola, l'abitudine potrebbe condizionare comunque le aspettative e spingere a scegliere, tra due interpretazioni, quella il cui svolgimento utilizza tutti i dati forniti.
Vedremo, nel caso del problema in esame, che alcune varianti utilizzano l'informazione della diversa distanza tra arcieri e bersaglio, mentre altre la ignorano.

.

1.3 Costruzione di possibili scenari che portano a divergenze interpretative

Come la continua ricerca di significati porta il nostro cervello a costruirsi immagini familiari anche dove regna il puro caso come per il volto umanoide tradizionalmente associato alla luna piena, così mi sembra che la nostra mente tenda a elaborare scenari non richiesti esplicitamente allo scopo di intendere meglio il testo del problema proposto. Dopo il prossimo paragrafo verranno descritti alcuni scenari capaci di suggerire significati assai diversi da attribuire al testo del problema che è stato formulato.

2. Partizione dei possibili accadimenti in otto eventi

Questo paragrafo sarà utilizzato in tutte le varianti del problema che saranno presentate.
Indichiamo con A, B, C gli eventi in cui l'omonimo arciere colpisce il bersaglio e con A, B, C segnati gli eventi contrari.
Sarà quindi:

$$\left|\begin{array}{c|c|c|c} A \vee \overline{A} = U & A \wedge \overline{A} = \phi & P(A) = \frac{3}{5} & P(\overline{A}) = 1 - P(A) \\ B \vee \overline{B} = U & B \wedge \overline{B} = \phi & P(B) = \frac{1}{2} & P(\overline{B}) = 1 - P(B) \\ C \vee \overline{C} = U & C \wedge \overline{C} = \phi & P(C) = \frac{4}{5} & P(\overline{C}) = 1 - P(C) \end{array}\right|$$

Consideriamo preliminarmente lo spazio dei tre possibili esiti dei tiri che indichiamo con U. Risulta quindi P(U)=1
Creiamo una partizione di U secondo le otto diverse storie possibili.
Come si può osservare nella tabella sottostante, le disposizioni con ripetizione di classe 3 su due simboli, 1 per bersaglio colpito e 0 per bersaglio non colpito, indicano 8 possibilità corrispondenti ai numeri binari da 0 a 7.

000	$S_0 = \overline{A} \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}$	nessuno colpisce il bersaglio	$P(S_0) = 4\%$
001	$S_1 = \overline{A} \wedge \overline{B} \wedge C$	solo C va a segno	$P(S_1) = 16\%$
010	$S_2 = \overline{A} \wedge B \wedge \overline{C}$	solo B va a segno	$P(S_2) = 4\%$
011	$S_3 = \overline{A} \wedge B \wedge C$	solo A non va a segno	$P(S_3) = 16\%$
100	$S_4 = A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}$	solo A va a segno	$P(S_4) = 6\%$
101	$S_5 = A \wedge \overline{B} \wedge C$	solo B non va a segno	$P(S_5) = 24\%$
110	$S_6 = A \wedge B \wedge \overline{C}$	solo C non va a segno	$P(S_6) = 6\%$
111	$S_7 = A \wedge B \wedge C$	tutti colpiscono il bersaglio	$P(S_7) = 24\%$

Nell'ultima colonna compaiono le probabilità di ognuno degli otto eventi alternativi S_0 $S_1 ... S_7$ calcolate, per la supposta indipendenza degli eventi, con il teorema della probabilità composta.

Si può notare che gli eventi relativi all'esito del lancio dei singoli arcieri si possono ottenere anche come unioni di alcune di queste otto storie (eventi) fondamentali

$A = S_4 \vee S_5 \vee S_6 \vee S_7$	$P(A) = P(S_4) + P(S_5) + P(S_6) + P(S_7)$	60%
$\overline{A} = S_0 \vee S_1 \vee S_2 \vee S_3$	$P(\overline{A}) = P(S_0) + P(S_1) + P(S_2) + P(S_3)$	40%
$B = S_2 \vee S_3 \vee S_6 \vee S_7$	$P(B) = P(S_2) + P(S_3) + P(S_6) + P(S_7)$	50%
$\overline{B} = S_0 \vee S_1 \vee S_4 \vee S_5$	$P(\overline{B}) = P(S_0) + P(S_1) + P(S_4) + P(S_5)$	50%
$C = S_1 \vee S_3 \vee S_5 \vee S_7$	$P(C) = P(S_1) + P(S_3) + P(S_5) + P(S_7)$	80%
$\overline{C} = S_0 \vee S_2 \vee S_4 \vee S_5$	$P(\overline{C}) = P(S_0) + P(S_2) + P(S_4) + P(S_5)$	20%

3. Scenario a lanci terminati

Appurato che ciascuno dei tre arcieri ha appena scagliato la propria freccia ci si sposta sul luogo dei lanci per osservare lo stato del bersaglio dopo i tre tiri. Evidentemente gli eventi possibili, tra loro incompatibili sono 0, 1, 2 ,3 frecce a segno. Si enuncia il problema: *Se una freccia colpisce il bersaglio, qual è la probabilità che sia dell'arciere A?*

Il problema suppone il verificarsi della proposizione "una freccia colpisce il bersaglio" e quindi l'evento E=”Si verifica S_1 oppure S_2 oppure S_4”

la cui probabilità, per il teorema della probabilità totale, vista l'incompatibilità dei tre eventi componenti è

$$P(E) = P(S_1) + P(S_2) + P(S_4)$$

Nel nostro caso, per i dati ricavati nel precedente paragrafo, è il 26%

Dobbiamo rivalutare quindi, a causa delle informazioni acquisite, alla luce del teorema di Bayes, le tre probabilità di andare a segno:

$$\left|\begin{array}{l} P(A|E) = \dfrac{P(E|A)P(A)}{P(E)} \\[2ex] P(B|E) = \dfrac{P(E|B)P(B)}{P(E)} \\[2ex] P(C|E) = \dfrac{P(E|C)P(C)}{P(E)} \end{array}\right| \begin{array}{l} = \dfrac{\frac{1}{10}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{13}{50}} = \dfrac{3}{13} \\[2ex] = \dfrac{\frac{2}{25}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{13}{50}} = \dfrac{2}{13} \\[2ex] = \dfrac{\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}}{\frac{13}{50}} = \dfrac{8}{13} \end{array}\right|$$

Infatti risulta:
$P(E|A)=P(S_4)/P(A)=1/10$, $P(E|B)=P(S_2)/P(B)=2/25$, $P(E|C)=P(S_1)/P(C)=1/5$
Dunque la probabilità che la freccia sia di A è 3/13

3.1 Metodo alternativo

$$\left|\begin{array}{l} P(S_4|E) = \dfrac{P(E|S_4)P(S_4)}{P(E)} \\[2ex] P(S_2|E) = \dfrac{P(E|S_2)P(S_2)}{P(E)} \\[2ex] P(S_1|E) = \dfrac{P(E|S_1)P(S_1)}{P(E)} \end{array}\right| \begin{array}{l} = \dfrac{1\cdot\frac{3}{50}}{\frac{13}{50}} = \dfrac{3}{13} \\[2ex] = \dfrac{1\cdot\frac{1}{25}}{\frac{13}{50}} = \dfrac{2}{13} \\[2ex] = \dfrac{1\cdot\frac{4}{25}}{\frac{13}{50}} = \dfrac{8}{13} \end{array}\right|$$

Essendo S_4, S_2, S_1 sottoinsiemi di E il verificarsi di uno dei tre implica il verificarsi di E.
Dunque risulta $P(E|S_4)=P(E|S_2)=P(E|S_1)=1$
Dunque la probabilità che la freccia sia di A è 3/13

4. Scenario della prima freccia a segno

Si sta seguendo l'evento sul proprio telefonino, appare in diretta null'altro che il bersaglio inquadrato da una telecamera fissa senza né audio o né altre informazioni. Si sa che entro un'ora i lanci dovranno essere effettuati. Si sta aspettando pazientemente l'eventuale arrivo di una prima freccia a segno. Si enuncia il problema:
Se una freccia colpisce il bersaglio, qual è la probabilità che sia dell'arciere A?
L'ipotesi presa in considerazione dal problema implica il verificarsi dell'evento "almeno una freccia va a segno" equivalente a "non si verifica S_0" per cui
$P(E)=1-P(S_0)$ la cui probabilità, visti i dati forniti dal problema è 96%
Per motivi di sicurezza possiamo escludere che il lancio delle frecce avvenga simultaneamente.

Infatti dai dati del problema i tre arcieri dovrebbero essere sulla stessa retta perpendicolare al centro del bersaglio il che mette a repentaglio la vita di C e di A più vicini al bersaglio.
Si suppone quindi che le frecce siano lanciate a intervalli di tempo da un arciere dopo l'altro.
I casi possibili sono tanti quanti le possibili permutazioni di tre elementi: ABC,ACB,BAC,BCA,CAB,CBA
I sei casi, pur dando risultati differenti, sono abbastanza simili per quanto riguarda la loro risoluzione. I casi più verosimili sembrano essere l'ordine alfabetico ABC e l'ordine dal più vicino al più lontano CAB.
Affronteremo il primo caso e poi daremo brevemente la soluzione degli altri cinque.

4.1 Ipotesi delle frecce lanciate in ordine ABC

Si suppone che le frecce siano lanciate da un arciere dopo l'altro in ordine alfabetico (ordine A,B,C)
In questo caso le possibilità totali si possono suddividere in quattro eventi tra loro incompatibili

A_1	A è il primo a colpire	A	$S_4 \vee S_5 \vee S_6 \vee S_7$	60%
B_1	B è il primo a colpire	$\overline{A} \wedge B$	$S_2 \vee S_3$	20%
C_1	C è il primo a colpire	$\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge C$	S_1	16%
	nessuno colpisce	$\overline{C} \wedge \overline{A} \wedge \overline{B}$	S_0	4%

Dato che sia A_1 che B_1 che C_1 implicano E, negazione di S_0, risulta

$$P(E|A_1) = P(E|B_1) = P(E|C_1) = 1$$

per il teorema di Bayes

$$\begin{array}{|l|l|}
P(A_1|E) = \frac{P(E|A_1)P(A_1)}{P(E)} & = \frac{1 \cdot \frac{3}{5}}{\frac{24}{25}} = \frac{5}{8} \\
P(B_1|E) = \frac{P(E|B_1)P(B_1)}{P(E)} & = \frac{1 \cdot \frac{1}{25}}{\frac{24}{25}} = \frac{5}{24} \\
P(C_1|E) = \frac{P(E|C_1)P(C_1)}{P(E)} & = \frac{1 \cdot \frac{4}{5}}{\frac{24}{25}} = \frac{1}{6}
\end{array}$$

4.2 Confronto tra le permutazioni

Ricordiamo che:

$$\begin{array}{|l|l|l|l|}
P(S_0) = 4\% & P(S_1) = 16\% & P(S_2) = 4\% & P(S_3) = 16\% \\
P(S_4) = 6\% & P(S_5) = 24\% & P(S_6) = 6\% & P(S_7) = 24\%
\end{array}$$

Ricordiamo anche che P(E)=96%
Risolviamo quindi brevemente tutti i casi analoghi a quello già mostrato in precedenza
Ecco dunque i casi relativi alle 3! permutazioni possibili nell'ordine dei tiri, compresi i due casi già visti:

$$\left|\begin{array}{c|c|c|c|c} A_{1,acb} & A \text{ è il primo a colpire} & A & S_4 \vee S_5 \vee S_6 \vee S_7 & 60\% \\ C_{1,acb} & C \text{ è il primo a colpire} & \overline{A} \wedge C & S_1 \vee S_3 & 32\% \\ B_{1,acb} & B \text{ è il primo a colpire} & \overline{A} \wedge \overline{C} \wedge B & S_2 & 4\% \end{array}\right|$$

$$P(A_{1,acb}|E) = \frac{5}{8} \quad P(B_{1,acb}|E) = \frac{1}{24} \quad P(C_{1,acb}|E) = \frac{1}{3}$$

$$\left|\begin{array}{c|c|c|c|c} A_{1,acb} & A \text{ è il primo a colpire} & A & S_4 \vee S_5 \vee S_6 \vee S_7 & 60\% \\ C_{1,acb} & C \text{ è il primo a colpire} & \overline{A} \wedge C & S_1 \vee S_3 & 32\% \\ B_{1,acb} & B \text{ è il primo a colpire} & \overline{A} \wedge \overline{C} \wedge B & S_2 & 4\% \end{array}\right|$$

$$P(A_{1,acb}|E) = \frac{5}{8} \quad P(B_{1,acb}|E) = \frac{1}{24} \quad P(C_{1,acb}|E) = \frac{1}{3}$$

$$\left|\begin{array}{c|c|c|c|c} B_{1,bac} & B \text{ è il primo a colpire} & B & S_2 \vee S_3 \vee S_6 \vee S_7 & 50\% \\ A_{1,bac} & A \text{ è il primo a colpire} & \overline{B} \wedge A & S_4 \vee S_5 & 30\% \\ C_{1,bac} & C \text{ è il primo a colpire} & \overline{A} \wedge \overline{B} \wedge C & S_1 & 16\% \end{array}\right|$$

$$P(A_{1,bac}|E) = \frac{5}{16} \quad P(B_{1,bac}|E) = \frac{25}{48} \quad P(C_{1,bac}|E) = \frac{1}{6}$$

$$\left|\begin{array}{c|c|c|c|c} B_{1,bca} & B \text{ è il primo a colpire} & B & S_2 \vee S_3 \vee S_6 \vee S_7 & 50\% \\ C_{1,bca} & C \text{ è il primo a colpire} & \overline{B} \wedge C & S_1 \vee S_5 & 40\% \\ A_{1,bca} & A \text{ è il primo a colpire} & \overline{B} \wedge \overline{C} \wedge A & S_4 & 6\% \end{array}\right|$$

$$P(A_{1,bca}|E) = \frac{1}{16} \quad P(B_{1,bca}|E) = \frac{25}{48} \quad P(C_{1,bca}|E) = \frac{5}{12}$$

$$\left|\begin{array}{c|c|c|c|c} C_{1,cab} & C \text{ è il primo a colpire} & C & S_1 \vee S_3 \vee S_5 \vee S_7 & 80\% \\ A_{1,cab} & A \text{ è il primo a colpire} & \overline{C} \wedge A & S_4 \vee S_6 & 12\% \\ B_{1,cab} & B \text{ è il primo a colpire} & \overline{C} \wedge \overline{A} \wedge B & S_2 & 4\% \end{array}\right|$$

$$P(A_{1,cab}|E) = \frac{1}{8} \quad P(B_{1,cab}|E) = \frac{1}{24} \quad P(C_{1,cab}|E) = \frac{5}{6}$$

$$\left|\begin{array}{c|c|c|c|c} C_{1,cba} & C \text{ è il primo a colpire} & C & S_1 \vee S_3 \vee S_5 \vee S_7 & 80\% \\ B_{1,cba} & B \text{ è il primo a colpire} & \overline{C} \wedge B & S_2 \vee S_6 & 10\% \\ A_{1,cba} & A \text{ è il primo a colpire} & \overline{C} \wedge \overline{B} \wedge A & S_4 & 6\% \end{array}\right|$$

$$P(A_{1,cba}|E) = \frac{1}{16} \quad P(B_{1,cba}|E) = \frac{5}{48} \quad P(C_{1,cba}|E) = \frac{5}{6}$$

4.3 Caso dell'ordine di lancio ignoto

In questo caso si può supporre che ci sia stato un sorteggio a caso di una delle sei (3!) possibilità ritenute equiprobabili.
Indicando con A_1 l'evento "A è il primo a colpire il bersaglio" e sfruttando i risultati del precedente paragrafo abbiamo:

$$P(A_1|E) = \frac{1}{6}P(A_{1,abc}|E) + \frac{1}{6}P(A_{1,acb}|E) + \frac{1}{6}P(A_{1,bac}|E) +$$

$$+\frac{1}{6}P(A_{1,bca}|E) + \frac{1}{6}P(A_{1,cab}|E) + \frac{1}{6}P(A_{1,cba}|E)$$

Sostituendo in questa e nelle due analoghe si ottiene:

$$P(A_1|E) = 29/96 \quad P(B_1|E) = 23/96 \quad P(C_1|E) = 11/24$$

5. Scenario di una freccia a segno

Sappiamo che è stato deciso che i tre arcieri lancino contemporaneamente ma parallelamente ognuno verso un proprio bersaglio. I bersagli sono stati posti a distanza di sicurezza gli uni dagli altri, ma solo uno dei tre è inquadrato da una telecamera fissa senza audio. Sappiamo che il lancio è imminente, ma non sappiamo altro. Nell'attesa si enuncia il problema:
Se una freccia colpisce il bersaglio, qual è la probabilità che sia dell'arciere A?
In questo caso si verifica l'evento E=”Almeno una freccia raggiunge il bersaglio”
$P(E)=1-P(S_0)$ Nel nostro caso corrisponde al 96%
Sia l'evento A*="la freccia a segno è di A", analogamente per B* e C*. Risulta:

$$P(A^*) = P(S_4) + \frac{1}{2}P(S_5) + \frac{1}{2}P(S_6) + \frac{1}{3}P(S_7) = 29\%$$

$$P(B^*) = P(S_2) + \frac{1}{2}P(S_3) + \frac{1}{2}P(S_6) + \frac{1}{3}P(S_7) = 23\%$$

$$P(C^*) = P(S_1) + \frac{1}{2}P(S_3) + \frac{1}{2}P(S_5) + \frac{1}{3}P(S_7) = 44\%$$

Essendo $P(E|A^*)=P(E|B^*)=P(E|C^*)=1$ per il teorema di Bayes:

$$\left| \begin{array}{l} P(A^*|E) = \dfrac{P(E|A^*)P(A^*)}{P(E)} \\ P(B^*|E) = \dfrac{P(E|B^*)P(B^*)}{P(E)} \\ P(C^*|E) = \dfrac{P(E|C^*)P(C^*)}{P(E)} \end{array} \right| \begin{array}{l} = \dfrac{29\%}{96\%} = \dfrac{29}{96} \\ = \dfrac{23\%}{96\%} = \dfrac{23}{96} \\ = \dfrac{44\%}{96\%} = \dfrac{11}{24} \end{array} \right|$$

6. Scenario del lancio di un arciere non identificato

Immaginiamo che si segua l'evento già iniziato da lontano con un binocolo.
Si vede un arciere che si sta scaldando per lanciare il proprio dardo.
Impossibile identificarlo. Certamente però è A oppure B oppure C con uguali possibilità.
Non sappiamo neppure se l'arciere osservato sia il primo, il secondo o l'ultimo a tirare.
Non possiamo vedere se la freccia che presto sarà scoccata andrà a segno, ma possiamo vedere chiaramente l'arbitro che, come sappiamo, sventolerà le sue bandierine se una freccia colpirà il bersaglio altrimenti allargherà le braccia per segnalare il contrario. Nell'attesa si formula il problema:
Se una freccia colpisce il bersaglio, qual è la probabilità che sia dell'arciere A?
Indichiamo l'evento "uno dei tre arcieri tira e colpisce il bersaglio" con la lettera E.
Indicando con T_A T_B T_C l'evento in cui a tirare è l'arciere specificato in pedice si ha

$$P(T_A) = P(T_B) = P(T_C) = \frac{1}{3}$$

$$E = T_A \wedge A \vee T_B \wedge B \vee T_C \wedge C$$

e quindi per i teoremi della probabilità composta e totale abbiamo

$$P(E) = \frac{1}{3}P(A) + \frac{1}{3}P(B) + \frac{1}{3}P(C)$$

per cui sostituendo i dati si ottiene:

$$P(E) = \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{4}{15} = \tfrac{19}{30}$$

$$\left| \begin{array}{l} P(T_A|E) = \dfrac{P(E|T_A)P(T_A)}{P(E)} \\ P(T_B|E) = \dfrac{P(E|T_B)P(T_B)}{P(E)} \\ P(T_C|E) = \dfrac{P(E|T_C)P(T_C)}{P(E)} \end{array} \right| \begin{array}{l} = \dfrac{\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{19}{30}} = \dfrac{6}{19} \\ = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{19}{30}} = \dfrac{5}{19} \\ = \dfrac{\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{19}{30}} = \dfrac{8}{19} \end{array} \right|$$

7. Elementi di storia del problema

Non so né chi abbia ideato né quando sia stato ideato questo problema.
Io ne sono venuto a conoscenza grazie alla mia amica Ivana Niccolai, maestra elementare in pensione e appassionata di matematica.
Da lei ho saputo che il problema nel 2003 fu postato da un corsista nel forum nazionale di matematica dell'Indire moderato da un professore di calcolo delle probabilità
Quasi immediatamente, il moderatore postò la sua soluzione. Siccome nessuno dei docenti partecipanti, compreso chi aveva proposto tale quesito, aveva inviato alcuna soluzione alternativa, Ivana preferì scegliere il silenzio, aspettando di riuscire a capire, prima o poi, la risposta del moderatore. La sua risoluzione era diversa , ma avrebbe voluto comprendere quanto scritto dal moderatore prima di intervenire in merito. Alla fine decise di trascrivere negli appunti, da rivedere in seguito, testo e risoluzione pubblicati, in attesa di trovare, poi, il tempo necessario per una riflessione approfondita, tanto più che in tale periodo era mancata sua madre.
Molti anni dopo, nel 2014, Ivana incontrò lo stesso identico problema nel forum "Matematicamente". Qui trovò una risposta del tutto diversa rispetto a quella postata dal docente di calcolo delle probabilità, da lei trascritta più di dieci anni prima; era invece simile a quella a cui era giunta lei, ma di cui non era sicura. Constatata questa diversità nelle risposte, Ivana cercò in molti modi di dirimere la questione e infine si rivolse anche a me.
All'inizio la soluzione data nel forum Matematicamente mi sembrò essere l'unica corretta. La precisai meglio, chiarendo i passaggi e mettendo bene in evidenza il teorema di Bayes, ma confermandone in pieno il risultato. Poi però, pian piano, stimolato da quella risposta enigmatica, mi resi conto di quanto il testo proposto fosse ambiguo e si prestasse a interpretazioni diverse. Esplorai così un vasto spazio di possibilità cercando di esaminare ogni possibile caso. Mi accorsi quindi che in alcune varianti venivano sfruttati tutti i dati del problema, anche quelli che in prima lettura apparivano curiosamente inutili. Insomma, mi appassionai al problema e alle sue sfaccettature fino al punto di decidere, con la collaborazione di Ivana, di pubblicare, in un sito didattico, Maecla, le varie soluzioni escogitate.
Passati ancora diversi anni ho deciso di rivedere quel lavoro e presentare quel problema a questo simposio.

7.1 Effetto "Ipse dixit"

Tre frecce vengono lanciate contro un bersaglio da tre arcieri. Poiché i tre arcieri sono a distanza diversa dal bersaglio, si stima in 3/5 la probabilità dell' arciere A di colpire *il bersaglio, in 1/2 quella dell'arciere B e in 4/5 quella dell'arciere C. Se una freccia colpisce il bersaglio, qual è la probabilità che sia dell'arciere A?*

Unica risposta al problema, postato da una corsista nel 2003, fornita dal moderatore Giuseppe Anichini nel forum di matematica
del percorso A del FORTIC:
“Il problema non sembra esaurientemente enunciato.
Aggiungo pertanto una ipotesi ed una doppia casistica:
ipotesi: una SOLA freccia colpisce il bersaglio;
.casistica A): VEDIAMO i 3 amici tirare contemporaneamente.
.casistica B): VENIAMO INFORMATI che uno dei 3 ha tirato ed ha colpito il bersaglio.
- nel caso A e' ovvio che la risposta non puo' essere che 3/5 essendo indifferente la presenza di 2 (o piu') tiratori;
- nel caso B DOBBIAMO decidere con quale probabilita' il tiratore in oggetto e' A: e' il problema della necessita' di predisporre una valutazione di probabilita' a priori, essenziale nella impostazione bayesiana. In assenza di informazioni possiamo noi supporre probabilita' 1/3 per tale evento (e per gli analoghi eventi B e C). Tutto cio' precisato la risposta -- diretta applicazione della regola di Bayes -- e' 6/19”

Commento

L'intervento ha il merito di evidenziare deficienze nell'enunciato del problema.
Mentre il caso B corrisponde al nostro scenario del lancio di un arciere non identificato, per quanto riguarda il caso A la risposta data non solo non mi sembra ovvia, ma mi sembra chiaramente errata; quasi certamente inserita ad arte dal docente per stimolare interventi che poi, avendo probabilmente l’autorità del moderatore intimorito i frequentatori del forum, non ci sono stati.
La risposta non è ammissibile perché allora per lo stesso motivo le probabilità di B e di C di essere i lanciatori dell'unica freccia a segno sarebbero 50% e 80%. Ma così la probabilità totale sarebbe 190% invece di 100%!. Se poi vogliamo divertirci a cambiare i dati del problema possiamo assegnare a C il 100% (arciere infallibile data la sua estrema vicinanza al bersaglio) e capire senza difficoltà che in questo caso la probabilità che la sola freccia andata a segno sia di A è nulla.
Speriamo inoltre, per motivi umanitari, che A e B abbiano voluto risparmiare la vita di C che comunque, date contemporaneità e vicinanza, avrebbe avuto il tempo di andare a segno!

Siti

● Utente_V, https://www.matematicamente.it/forum/post163288.html, Forum Matematicamente, 2007

● Giorgio Pietrocola, http://www.pietrocola.eu/maecla/iperproblema/index.htm, Iperproblema dei tre arcieri, Maecla 2014

● Utente_Panurgo, https://www.base5forum.it/tre-arcieri-tre-freccie-una-freccia-t7760.html, Forum Base 5, 2014