

Sui polinomi per il calcolo di somme di potenze di interi successivi e sui numeri di Bernoulli dedotti e dimostrati con il triangolo di Tartaglia

di Giorgio Pietrocola

[giorgio.pietrocola\[at\]gmail.com](mailto:giorgio.pietrocola[at]gmail.com)

ricerca ancora in corso:

Aggiornato al 3 Luglio 2017

Aggiornato al 28.9.2017 (5.3,6.3)

Indice

[1. Il problema della somma di potenze](#)

[2. Introduzione storica](#)

[3. La relazione di alternanza](#)

3.1 Due matrici alternate hanno lo stesso determinante

3.2 Se due matrici sono in relazione di alternanza...

[4. La matrice del triangolo di Tartaglia](#)

4.1 Matrici triangolari ritagliate...

[5. Teorema "1A"](#)

5.1 Nota su un' identità attribuita a Pascal

5.3 Teorema "1AU"

[6. Teorema "1B"](#)

6.3 Teorema "1BU"

[7. Corollari](#)

7.1 Coefficienti di grado massimo

7.2 Coefficienti dei monomi secondi

7.3 Differenze tra la matrice G e la sua...

7.4 Teoremi sulla ripetizione di zeri

7.5 Numeri di Bernoulli

7.6 I coefficienti dei monomi di ...

7.7 Formula diretta per i numeri di Bernoulli

7.8 Formula ricorsiva

8. La formula rivelata in “Ars conjectandi”

8.1 Due casi particolari, formule ricorsive

9. L'algoritmo di Ada

10. La via analitica

10.1 funzione generatrice della variante negativa

10.2 funzione generatrice della variante positiva

11. altre relazioni con le matrici considerate

11.2. Fattoriali crescenti e decrescenti

11.3. Altre relazioni notevoli

12. Bibliografia

Sommario

Partendo da un punto di vista diverso dal tradizionale si affronta il problema classico della determinazione dei coefficienti dei polinomi per il calcolo delle somme di potenze di interi successivi. Si dimostra che questi coefficienti possono essere calcolati invertendo una matrice tratta dal triangolo di Tartaglia senza ricorrere ai numeri di Bernoulli. Questi ultimi vengono poi definiti utilizzando le matrici considerate e si cerca, per questa via, di dimostrarne le proprietà, compresa quella rivelata da Jakob Bernoulli nel suo “Ars conjectandi”. Infine si evidenziano relazioni, ancora da approfondire,

di queste matrici con elementi correlati come i polinomi di Bernoulli e i numeri di Stirling.

1. Il problema della somma di potenze.

Il problema consiste nell'ottenere la somma di un certo numero n di potenze di interi successivi elevati a un certo esponente intero m mediante un polinomio che ne faciliti il calcolo. Con $m=0$ il problema è banale perché gli n addendi valgono tutti 1 e la somma è quindi n (polinomio di primo grado). Con $m=1$ si tratta di trovare la somma dei primi n numeri naturali e si può risolvere rapidamente pensando di raddoppiare somma e risultato, associando opportunamente addendi crescenti e decrescenti delle due somme si ottiene n volte $1+n$, dividendo per due come quando si calcola l'area di un triangolo si arriva al polinomio di secondo grado cercato. Nei casi successivi esiste sempre un polinomio di grado via via crescente, ma mentre alcuni coefficienti dei monomi appaiono facilmente prevedibili altri sembrano succedersi in modo piuttosto caotico.

Ecco intanto, a titolo di esempio, i primi casi:

$$\sum_{k=1}^n k^0 = 1^0 + 2^0 + 3^0 + \dots + n^0 = n$$

$$\sum_{k=1}^n k^1 = 1^1 + 2^1 + 3^1 + \dots + n^1 = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3$$

...

Questi primi risultati possono essere efficacemente riassunti utilizzando il prodotto righe per colonne tra matrici:

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n k^0 \\ \sum_{k=1}^n k^1 \\ \sum_{k=1}^n k^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} n \\ n^2 \\ n^3 \end{pmatrix}$$

Se invece di considerare n addendi ci si ferma a $n-1$ le somme possono anche essere espresse così:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} k^0 &= 1^0 + 2^0 + \dots + (n-1)^0 = n-1 \\ \sum_{k=1}^{n-1} k^1 &= 1^1 + 2^1 + \dots + (n-1)^1 = -\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2 \\ \sum_{k=1}^{n-1} k^2 &= 1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{1}{6}n - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3 \\ &\dots \end{aligned}$$

Che si può anche scrivere:

$$\begin{pmatrix} 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k^0 \\ \sum_{k=1}^{n-1} k^1 \\ \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} n \\ n^2 \\ n^3 \end{pmatrix}$$

Indicheremo, al variare degli indici che ne indicano le dimensioni, le matrici dei polinomi in questo modo:

$$G_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad e \quad \overline{G}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

2. Introduzione storica

Il fascino di questo problema ha attratto matematici sin dall'antichità. Il caso con esponente uno, i numeri triangolari, erano ben conosciuti sin dai tempi di Pitagora. Il caso successivo, con esponente due, pare sia stato risolto da Archimede. Con l'esponente tre fu dimostrato da Nicomaco di Gerasa (circa 60-120) un sorprendente teorema che ora porta il suo nome:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$$

ossia, in forma compatta:

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2$$

Nel 1631 il tedesco Jhoann Faulhaber (1580-1635) pubblica su Academia Algebrae un suo studio dove presenta molti polinomi che risolvono il problema in casi particolari arrivando fino alla diciassettesima potenza. Per esempio, proseguendo la strada di Nicomaco trova per gli esponenti dispari:

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = A \quad A = \frac{n^2 + n}{2}$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = A^2$$

$$\sum_{k=1}^n k^5 = \frac{4A^3 - A^2}{3}$$

$$\sum_{k=1}^n k^7 = \frac{6A^4 - 4A^3 + A^2}{3}$$

$$\sum_{k=1}^n k^9 = \frac{16A^5 - 20A^4 + 12A^3 - 3A^2}{5}$$

$$\sum_{k=1}^n k^{11} = \frac{16A^6 - 32A^5 + 34A^4 - 20A^3 + 5A^2}{3}$$

$$\sum_{k=1}^n k^{13} = \frac{960A^7 - 2800A^6 + 4592A^5 - 4720A^4 + 2764A^3 - 691A^2}{105}$$

$$\sum_{k=1}^n k^{15} = \frac{48A^8 - 192A^7 + 448A^6 - 704A^5 + 718A^4 - 420A^3 + 105A^2}{3}$$

$$\sum_{k=1}^n k^{17} = \frac{1280A^9 - 6720A^8 + 21120A^7 - 46880A^6 + 72912A^5 - 74220A^4 + 43404A^3 - 10851A^2}{45}$$

D.Knuth, Tratto dallo studio di D.Knuth , [Johann Faulhaber and sum of powers](#) ,Internet Archive, 1992

Ulteriori progressi si hanno con lo svizzero Jakob Bernoulli (1654-1705). Nel 1713 viene pubblicato postumo il suo Ars Conjectandi di cui riportiamo la pagina fondamentale. Qui troviamo per la prima volta una legge generale, espressa in funzione di numeri particolari presi per la prima volta in considerazione, per trovare i polinomi che calcolano le varie somme di potenze al

crescere dell'esponente.

... Atque si porrò ad altiores gradatim potestates pergere, levique negotio sequentem adornare laterculum licet :

Summae Potestatum

$$f n = \frac{1}{2}nn + \frac{1}{2}n$$

$$f nn = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}nn + \frac{1}{6}n$$

$$f n^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}nn$$

$$f n^4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$$

$$f n^5 = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}nn$$

$$f n^6 = \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n$$

$$f n^7 = \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{1}{12}nn$$

$$f n^8 = \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \frac{2}{9}n^3 - \frac{1}{30}n$$

$$f n^9 = \frac{1}{10}n^{10} + \frac{1}{2}n^9 + \frac{3}{4}n^8 - \frac{7}{10}n^6 + \frac{1}{2}n^4 - \frac{1}{12}nn$$

$$f n^{10} = \frac{1}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^9 - 1n^7 + 1n^5 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{5}{66}n$$

Quin imò qui legem progressionis inibi attentuis ensperexit, eundem etiam continuare poterit absque his ratiociniorum ambabimus : Sumtâ enim c pro potestatis cujuslibet exponente, fit summa omnium n^c seu

$$\begin{aligned} \int n^c &= \frac{1}{c+1}n^{c+1} + \frac{1}{2}n^c + \frac{c}{2}An^{c-1} + \frac{c \cdot c - 1 \cdot c - 2}{2 \cdot 3 \cdot 4}Bn^{c-3} \\ &+ \frac{c \cdot c - 1 \cdot c - 2 \cdot c - 3 \cdot c - 4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}Cn^{c-5} \\ &+ \frac{c \cdot c - 1 \cdot c - 2 \cdot c - 3 \cdot c - 4 \cdot c - 5 \cdot c - 6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}Dn^{c-7} \dots \& \text{ita deinceps,} \end{aligned}$$

exponentem potestatis ipsius n continué minuendo binario, quosque perveniat ad n vel nn . Literae capitales A, B, C, D & c . ordine denotant coëfficientes ultimorum terminorum pro $f nn, f n^4, f n^6, f n^8$, & c . nempe

$$A = \frac{1}{6}, B = -\frac{1}{30}, C = \frac{1}{42}, D = -\frac{1}{30}.$$

Come si vede il generico polinomio relativo alla potenza c si costruisce agevolmente per quanto riguarda i due monomi di grado più alto, poi però, per gli altri coefficienti, il calcolo diventa via via più laborioso, ma soprattutto dipende da numeri molto particolari indicati dall'autore in maiuscolo con le prime lettere dell'alfabeto. Sono i misteriosi numeri che i matematici successivi chiamarono numeri di Bernoulli. Il contenuto della pagina mostrata sarà ripreso ed espresso in notazione attuale al paragrafo 8. Qui mettiamo in evidenza un errore, probabilmente di stampa, in uno dei coefficienti del polinomio di decimo grado. Ecco riportati in una matrice i valori corretti:

$$G_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{30} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{12} & 0 & \frac{5}{12} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{42} & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & 0 & -\frac{7}{24} & 0 & \frac{7}{12} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{30} & 0 & \frac{2}{9} & 0 & -\frac{7}{15} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{20} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{7}{10} & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{5}{66} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{11} \end{pmatrix}$$

La legge generale scoperta da Bernoulli che ricava in modo mirabile i coefficienti dei polinomi a partire dai suoi particolari numeri sarà dimostrata solo nel 1834 da Carl Gustav Jacobi¹(1804-1851) utilizzando una via analitica. Sulla stessa strada il suo allievo Bernhard Riemann (1826-1846) introdurrà l'importantissima funzione zeta pure connessa con i numeri di Bernoulli. Scoperta l'importanza di questa sequenza infinita di numeri si pose il problema del loro calcolo. La matematica inglese Ada Byron (1815,1852), contessa di Lovelace dopo il matrimonio contratto all'età di 20 anni, e figlia del noto poeta Lord Byron con cui non ebbe mai alcuna relazione essendo stata, per l'abbandono del padre, allevata solo dalla madre, nel 1843 pubblica un commento all'opera del connazionale Charles Babbage (1791-1871) ideatore di una macchina meccanica programmabile che non poté essere realizzata per motivi economici. Tra le sue note vi era il primo programma informatico della storia, la descrizione di un algoritmo proprio per

¹ Jacobi, Carl Gustav Jacob (1834). "De usu legitimo formulae summatoriae Maclauriniana". *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. **12**. pp. 263–72

calcolare i numeri di Bernoulli con la macchina analitica di Babbage. Oggi dopo quasi due secoli, con i moderni strumenti di calcolo, ci si è spinti molto avanti nel calcolo di questi numeri tanto che in rete ² si può trovare

$$B_{2\,000\,000} = -\frac{1329775613657311363237415859 \dots 3131145227911472514209002960697}{9601480183016524970884020224910}$$

More than 10 million digits were omitted in the middle of the numerator!

3. La relazione di alternanza e le sue proprietà

Nei paragrafi 3 e 4 daremo alcune nozioni propedeutiche all'approccio scelto per affrontare il problema.

Diremo che due matrici quadrate invertibili delle stesse dimensioni X e Y sono in relazione di alternanza se i corrispondenti elementi sono nella seguente relazione:

$$x_{i,k} = y_{i,k}(-1)^{i+k}$$

evidenzieremo questa relazione scrivendo:

$$X = \bar{Y}$$

Diremo anche che la matrice X è uguale all'alternata di Y e viceversa data la commutatività della relazione.

Per le nostre dimostrazioni è necessario tener presenti i seguenti teoremi:

² <http://www.bernoulli.org/>

3.1 Due matrici alternate hanno lo stesso determinante

Infatti se si considera il determinante di una matrice di ordine n espresso come somma di $n!$ addendi, ognuno composto da n fattori con gli indici di riga fissi e quelli di colonna permutati in tutti i modi possibili, si vede che questi addendi rimangono invariati se si passa alla matrice alternata. Difatti la somma degli indici di riga $1, 2, 3, \dots, n$ è $n(n+1)/2$ uguale alla somma degli indici delle colonne $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ per qualunque permutazione data la commutatività della somma. La somma totale degli indici è dunque il doppio di quella dei soli indici di riga, $n(n+1)$, numero pari per qualsiasi valore di n (intero positivo).

Pertanto ognuno degli $n!$ addendi composto da n fattori deve dare un numero pari nella totale sommatoria degli indici. In ogni addendo i fattori che cambiano segno passando da una matrice a una sua alternata sono quelli che hanno l'indice di riga più quello di colonna uguale a un numero dispari. Questi però, per ogni addendo, devono necessariamente essere in numero pari. Infatti se così non fosse la sommatoria parziale degli indici di riga e colonna relativa ai fattori che cambiano segno sarebbe dispari come il totale complessivo ottenuto aggiungendo le somme degli indici, tutte pari, relativi ai fattori che non cambiano segno, cosa che, come mostrato è impossibile. Allora se in ognuno degli $n!$ addendi cambiano segno un numero necessariamente pari di fattori l'addendo rimane invariato. Per questo il determinante di una matrice coincide con quello della sua alternata.

Esempio $n=3$:

$$\begin{aligned}
& a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} + \\
& + a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + \\
& + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} + a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} = \\
& = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,1}(-a_{2,3})(-a_{3,2}) + \\
& + (-a_{1,2})(-a_{2,1})a_{3,3} + (-a_{1,2})(-a_{2,3})a_{3,1} + \\
& + a_{1,3}(-a_{2,1})(-a_{3,2}) + a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}
\end{aligned}$$

3.2 Se due matrici sono in relazione di alternanza anche le loro inverse sono nella stessa relazione

Ciò si ricava facilmente dal precedente teorema tenendo conto che la matrice inversa è l'alternata della trasposta di particolari

3.3 Definizione alternativa di con l'algebra delle matrici.

Un modo equivalente per definire due matrici alternate è considerare la matrice J_m di m righe e m colonne composta da tutti zeri eccetto la diagonale principale con 1,-1,1,-1... J_m

la matrice J_m è inversa di se stessa essendo $J_m J_m = U_m$

Nuova definizione: X e Y si dicono alternate se $X = JYJ$

E' immediato dimostrare che in questo caso anche $Y = JXJ$

Anche i teoremi 3.1 e 3.2 si dimostrano in modo molto più semplice utilizzando ben note proprietà delle matrici e dei suoi determinanti.

4. La matrice del triangolo di Tartaglia e le sue matrici parziali.

Sviluppando le potenze $x+1$ si ottengono i seguenti polinomi:

$$(x+1)^0 = 1$$

$$(x+1)^1 = 1 + x$$

$$(x+1)^2 = 1 + 2x + x^2$$

$$(x+1)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$$

$$(x+1)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$$

$$(x+1)^5 = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5$$

che possiamo anche scrivere come prodotto di matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x+1 \\ (x+1)^2 \\ (x+1)^3 \\ (x+1)^4 \\ (x+1)^5 \end{pmatrix}$$

Si osservi che la moltiplicazione trasforma la base del vettore di potenze aumentandola di un'unità. Da questa osservazione si deduce che le potenze successive della matrice quadrata forniscono i coefficienti degli sviluppi delle potenze di $x+2$, $x+3$ e così via. Allo stesso modo l'inversa di T_n e le sue potenze sottrarranno unità alla base. Infatti:

$$(x-1)^0 = 1$$

$$(x-1)^1 = -1 + x$$

$$(x-1)^2 = 1 - 2x + x^2$$

$$(x-1)^3 = -1 + 3x - 3x^2 + x^3$$

$$(x-1)^4 = 1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4$$

$$(x-1)^5 = -1 + 5x - 10x^2 + 10x^3 - 5x^4 + x^5$$

che si può anche esprimere come:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & -10 & 10 & -5 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x-1 \\ (x-1)^2 \\ (x-1)^3 \\ (x-1)^4 \\ (x-1)^5 \end{pmatrix}$$

Indichiamo queste matrici quadrate nel seguente modo

$$T_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \bar{T}_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & -10 & 10 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Dato che i loro effetti moltiplicativi si annullano, difatti una aggiunge e l'altra sottrae un'unità alla base del vettore di potenze, le due matrici sono una inversa dell'altra. Inoltre sono anche in relazione di alternanza.

4.1 Matrici triangolari “ritagliate” dal triangolo di Tartaglia

Ecco come indicheremo matrici private del primo elemento di ogni riga:

$$Z_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \overline{Z}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Ecco come indicheremo matrici private dell'ultimo elemento di ogni riga:

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 \end{pmatrix} \quad \overline{A}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -6 & 4 & 0 \\ 1 & -5 & 10 & -10 & 5 \end{pmatrix}$$

Notare che quest'ultima matrice a segni alterni ha valori opposti rispetto ai corrispondenti valori nella matrice a segni alterni completa.

5. Teorema 1A

$$\overline{A}_m^{-1} = G_m$$

Si dimostra che i coefficienti dei polinomi per il calcolo della somma di n potenze di interi successivi si possono ottenere invertendo una matrice triangolare a segni alterni ricavabile dal triangolo di Tartaglia eliminando l'ultimo elemento di ogni riga.

Gli elementi di questa matrice possono essere definiti nel seguente modo:

$$\bar{A}_m : \bar{a}_{j,k} = \begin{cases} 0 & \text{se } k > j \\ \binom{j}{k-1}(-1)^{j+k} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

risulta quindi una matrice triangolare in cui compare il triangolo di Tartaglia, a segni alternati, privato dell'ultimo elemento di ogni riga. La sua diagonale principale risulta perciò formata dalla successione degli interi positivi il cui prodotto ($m!$) ne dà il determinante .

Si ha:

$$\begin{aligned} \bar{A}_m * \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n i^0 \\ \sum_{i=1}^n i^1 \\ \sum_{i=1}^n i^2 \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n i^{m-1} \end{pmatrix} &= \bar{A}_m * \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} i^0 \\ i^1 \\ i^2 \\ \dots \\ i^{m-1} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \bar{A}_m * \begin{pmatrix} i^0 \\ i^1 \\ i^2 \\ \dots \\ i^{m-1} \end{pmatrix} = \\ &= \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} i^1 - (i-1)^1 \\ i^2 - (i-1)^2 \\ i^3 - (i-1)^3 \\ \dots \\ i^m - (i-1)^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n^1 \\ n^2 \\ n^3 \\ \dots \\ n^m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nei primi due passaggi si è applicata la proprietà distributiva. Nel terzo, quando si moltiplica la matrice quadrata per il vettore di potenze si ottiene:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^m a_{j,k} * i^{k-1} &= \sum_{k=1}^j \binom{j}{k-1} * (-1)^{j+k} * i^{k-1} = \\
&= \sum_{k=1}^j (-1)^{2k-1} \binom{j}{k-1} * (-1)^{j-k+1} * i^{k-1} = \\
&= - \sum_{k=1}^j \binom{j}{k-1} * (-1)^{j-k+1} * i^{k-1} = \\
&= -(-i^j + \sum_{k=1}^{j+1} \binom{j}{k-1} * (-1)^{j-k+1} * i^{k-1}) = \\
&= -(-i^j + (i-1)^j) = i^j - (i-1)^j
\end{aligned}$$

Dunque si è dimostrato che:

$$\bar{A}_m * \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n i^0 \\ \sum_{i=1}^n i^1 \\ \sum_{i=1}^n i^2 \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n i^{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n^2 \\ n^3 \\ \dots \\ n^m \end{pmatrix}$$

Moltiplicando i due membri a sinistra per la matrice inversa del primo fattore si ottiene:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n i^0 \\ \sum_{i=1}^n i^1 \\ \sum_{i=1}^n i^2 \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n i^{m-1} \end{pmatrix} = \bar{A}_m^{-1} \begin{pmatrix} n \\ n^2 \\ n^3 \\ \dots \\ n^m \end{pmatrix}$$

E' dimostrato quindi questo teorema
che fornisce i famosi polinomi per il calcolo della somma di potenze di interi
successivi.

Esempio con $m=11$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -6 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 10 & -10 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & -15 & 20 & -15 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & 21 & -35 & 35 & -21 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & -28 & 56 & -70 & 56 & -28 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -9 & 36 & -84 & 126 & -126 & 84 & -36 & 9 & 0 & 0 \\ -1 & 10 & -45 & 120 & -210 & 252 & -210 & 120 & -45 & 10 & 0 \\ 1 & -11 & 55 & -165 & 330 & -462 & 462 & -330 & 165 & -55 & 11 \end{pmatrix}$$

E applicando il teorema dimostrato:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n i^0 \\ \sum_{i=1}^n i^1 \\ \sum_{i=1}^n i^2 \\ \sum_{i=1}^n i^3 \\ \sum_{i=1}^n i^4 \\ \sum_{i=1}^n i^5 \\ \sum_{i=1}^n i^6 \\ \sum_{i=1}^n i^7 \\ \sum_{i=1}^n i^8 \\ \sum_{i=1}^n i^9 \\ \sum_{i=1}^n i^{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{30} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{12} & 0 & \frac{5}{12} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{42} & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & 0 & -\frac{7}{24} & 0 & \frac{7}{12} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{30} & 0 & \frac{2}{9} & 0 & -\frac{7}{15} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{20} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{7}{10} & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{5}{66} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{11} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \\ n^5 \\ n^6 \\ n^7 \\ n^8 \\ n^9 \\ n^{10} \\ n^{11} \end{pmatrix}$$

Si può notare, nella prima colonna della matrice quadrata, la comparsa degli originali numeri di Bernoulli.

Esprimendo questa uguaglianza in forma equivalente otteniamo proprio i polinomi presentati nel libro di Bernoulli:

$$\sum_{i=1}^n i^0 = n$$

$$\sum_{i=1}^n i^1 = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3$$

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^4$$

$$\sum_{i=1}^n i^4 = -\frac{1}{30}n + \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{5}n^5$$

$$\sum_{i=1}^n i^5 = -\frac{1}{12}n^2 + \frac{5}{12}n^4 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{1}{6}n^6$$

$$\sum_{i=1}^n i^6 = \frac{1}{42}n - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{7}n^7$$

$$\sum_{i=1}^n i^7 = \frac{1}{12}n^2 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{7}{12}n^6 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{1}{8}n^8$$

$$\sum_{i=1}^n i^8 = -\frac{1}{30}n + \frac{2}{9}n^3 - \frac{7}{15}n^4 + \frac{2}{3}n^6 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{1}{9}n^9$$

$$\sum_{i=1}^n i^9 = -\frac{3}{20}n^2 + \frac{1}{2}n^4 - \frac{7}{10}n^6 + \frac{3}{4}n^8 + \frac{1}{2}n^9 + \frac{1}{10}n^{10}$$

$$\sum_{i=1}^n i^{10} = \frac{5}{66}n - \frac{1}{2}n^3 + n^5 - n^7 + \frac{5}{6}n^9 + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{1}{11}n^{11}$$

5.1 Nota su un'identità attribuita a Pascal

Se invece della matrice a segni alternati si usa A_m procedendo come visto nel precedente teorema si ottiene:

$$= \sum_{i=1}^n A_m * \begin{pmatrix} i^0 \\ i^1 \\ i^2 \\ \dots \\ i^{m-1} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} (i+1)^1 - i^1 \\ (i+1)^2 - i^2 \\ (i+1)^3 - i^3 \\ \dots \\ (i+1)^m - i^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (n+1)^1 - 1 \\ (n+1)^2 - 1 \\ (n+1)^3 - 1 \\ \dots \\ (n+1)^m - 1 \end{pmatrix}$$

Ponendo :

$$S_i(n) = \sum_{k=1}^n k^i$$

possiamo confrontare l'identità di Pascal³ con quella fondamentale nel teorema 1A:

$$\sum_{k=1}^m \binom{m}{k-1} S_{k-1}(n) = (n+1)^m - 1$$

$$\sum_{k=1}^m (-1)^{m+k} \binom{m}{k-1} S_{k-1}(n) = n^m$$

³ Mcmillan, Sondow [Proof of power sum and binomial coefficient congruences via Pascal's identity](#) digitalizzato su Internet archive, 2010

5.2 Fattorizzazione polinomiale

I polinomi per le somme di potenza possono essere considerati anche in questa forma:

$$\sum_{k=1}^n k^1 = (n+1) \frac{1}{2} n$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = (n+1) \left(\frac{1}{6} n + \frac{1}{3} n^2 \right)$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = (n+1) \left(\frac{1}{4} n^2 + \frac{1}{4} n^3 \right)$$

$$\sum_{k=1}^n k^4 = (n+1) \left(-\frac{1}{30} n + \frac{1}{30} n^2 + \frac{3}{10} n^3 + \frac{1}{5} n^4 \right)$$

$$\sum_{k=1}^n k^5 = (n+1) \left(-\frac{1}{12} n^2 + \frac{1}{12} n^3 + \frac{1}{3} n^4 + \frac{1}{6} n^5 \right)$$

$$\sum_{k=1}^n k^6 = (n+1) \left(\frac{1}{42} n - \frac{1}{42} n^2 - \frac{1}{7} n^3 + \frac{1}{7} n^4 + \frac{5}{14} n^5 + \frac{1}{7} n^6 \right)$$

$$\sum_{k=1}^n k^7 = (n+1) \left(\frac{1}{12} n^2 - \frac{1}{12} n^3 - \frac{5}{24} n^4 + \frac{5}{24} n^5 + \frac{3}{8} n^6 + \frac{1}{8} n^7 \right)$$

che in forma matriciale equivale a:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n i^1 \\ \sum_{i=1}^n i^2 \\ \sum_{i=1}^n i^3 \\ \sum_{i=1}^n i^4 \\ \sum_{i=1}^n i^5 \\ \sum_{i=1}^n i^6 \\ \sum_{i=1}^n i^7 \end{pmatrix} = E_7 \cdot \begin{pmatrix} (n+1)n \\ (n+1)n^2 \\ (n+1)n^3 \\ (n+1)n^4 \\ (n+1)n^5 \\ (n+1)n^6 \\ (n+1)n^7 \end{pmatrix} \quad \text{dove} \quad E_7 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{30} & \frac{1}{30} & \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ \frac{1}{42} & -\frac{1}{42} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{5}{14} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & -\frac{5}{24} & \frac{5}{24} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

5.3 Teorema 1AU

$$(\overline{A}_m + U_m)^{-1} = E_m$$

Si dimostra che, scomponendo i polinomi per il calcolo della somma di n potenze di interi successivi nel prodotto tra $(n+1)$ e un altro polinomio, i coefficienti di quest'ultimo si ottengono invertendo la somma tra la matrice unitaria e la matrice a segni alternati estratta dal triangolo di Tartaglia definita come nel teorema 1A

Applicando la proprietà distributiva si ha:

$$(U_m + \bar{A}_m) \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n i^1 \\ \sum_{i=1}^n i^2 \\ \sum_{i=1}^n i^3 \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n i^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n i^1 \\ \sum_{i=1}^n i^2 \\ \sum_{i=1}^n i^3 \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n i^m \end{pmatrix} + \bar{A}_m \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n i^1 \\ \sum_{i=1}^n i^2 \\ \sum_{i=1}^n i^3 \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n i^m \end{pmatrix} =$$

e anche:

$$= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n i \\ \sum_{i=1}^n i^2 \\ \sum_{i=1}^n i^3 \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n i^m \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^n \bar{A}_m \begin{pmatrix} i \\ i^2 \\ i^3 \\ \dots \\ i^m \end{pmatrix} =$$

Tenendo presente quanto mostrato nel teorema 1A risulta:

$$\sum_{k=1}^m \bar{a}_{j,k} i^k = i \sum_{k=1}^m \bar{a}_{j,k} i^{k-1} = i(i^j - (i-1)^j)$$

e quindi:

$$= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n i \\ \sum_{i=1}^n i^2 \\ \sum_{i=1}^n i^3 \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n i^m \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} i(i - (i - 1)) \\ i(i^2 - (i - 1)^2) \\ i(i^3 - (i - 1)^3) \\ \dots \\ i(i^m - (i - 1)^m) \end{pmatrix} =$$

Infine essendo

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n i(i^m - (i - 1)^m) &= 1 \cdot 1^m + 2 \cdot 2^m - 2 \cdot 1^m + 3 \cdot 3^m - 3 \cdot 2^m + \dots \\ &\dots + (n - 1)(n - 1)^m - (n - 1)(n - 2)^m + nn^m - n(n - 1)^m = \\ &= -1^m - 2^m - 3^m - \dots - (n - 1)^m + nn^m = \\ &= -1^m - 2^m - 3^m - \dots - (n - 1)^m - n^m + n^m + nn^m = \\ &= (1 + n)n^m - \sum_{i=1}^n i^m \end{aligned}$$

si ottiene:

$$= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n i \\ \sum_{i=1}^n i^2 \\ \sum_{i=1}^n i^3 \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n i^m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n(n + 1) - \sum_{i=1}^n i \\ n^2(n + 1) - \sum_{i=1}^n i^2 \\ n^3(n + 1) - \sum_{i=1}^n i^3 \\ \dots \\ n^m(n + 1) - \sum_{i=1}^n i^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (n + 1)n \\ (n + 1)n^2 \\ (n + 1)n^3 \\ \dots \\ (n + 1)n^m \end{pmatrix}$$

Per la transitività dell'uguaglianza si è dimostrato che:

$$(U_m + \bar{A}_m) \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n i^1 \\ \sum_{i=1}^n i^2 \\ \sum_{i=1}^n i^3 \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n i^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (n+1)n \\ (n+1)n^2 \\ (n+1)n^3 \\ \dots \\ (n+1)n^m \end{pmatrix}$$

Avendo la matrice triangolare, risultato della somma, un determinante non nullo ($m!$) , poniamo

$$E_m = (\bar{A}_m + U_m)^{-1}$$

moltiplichiamo per questa matrice quadrata $m \times m$, a sinistra, i due membri dell'equazione ottenuta esplicitando così le sommatorie. Si ottiene in tal modo quanto si voleva dimostrare:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n-1} i^1 \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^2 \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^3 \\ \dots \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^m \end{pmatrix} = \bar{E}_m \cdot \begin{pmatrix} (n-1)n \\ (n-1)n^2 \\ (n-1)n^3 \\ \dots \\ (n-1)n^m \end{pmatrix}$$

Esempio caso $m=7$

$$U_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \bar{A}_7 + U_7 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -6 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 10 & -10 & 6 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & -15 & 20 & -5 & 7 & 0 \\ 1 & -7 & 21 & -35 & 35 & -21 & 8 \end{pmatrix}$$

da cui calcolando

$$E_7 = (\bar{A}_7 + U_7)^{-1}$$

per il teorema dimostrato

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n i^1 \\ \sum_{i=1}^n i^2 \\ \sum_{i=1}^n i^3 \\ \sum_{i=1}^n i^4 \\ \sum_{i=1}^n i^5 \\ \sum_{i=1}^n i^6 \\ \sum_{i=1}^n i^7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{30} & \frac{1}{30} & \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ \frac{1}{42} & -\frac{1}{42} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{5}{14} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & -\frac{5}{24} & \frac{5}{24} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (n+1)n \\ (n+1)n^2 \\ (n+1)n^3 \\ (n+1)n^4 \\ (n+1)n^5 \\ (n+1)n^6 \\ (n+1)n^7 \end{pmatrix}$$

che corrisponde a

$$\sum_{k=1}^n k^1 = (n+1) \frac{1}{2} n$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = (n+1) \left(\frac{1}{6} n + \frac{1}{3} n^2 \right)$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = (n+1) \left(\frac{1}{4} n^2 + \frac{1}{4} n^3 \right)$$

$$\sum_{k=1}^n k^4 = (n+1) \left(-\frac{1}{30} n + \frac{1}{30} n^2 + \frac{3}{10} n^3 + \frac{1}{5} n^4 \right)$$

$$\sum_{k=1}^n k^5 = (n+1) \left(-\frac{1}{12} n^2 + \frac{1}{12} n^3 + \frac{1}{3} n^4 + \frac{1}{6} n^5 \right)$$

$$\sum_{k=1}^n k^6 = (n+1) \left(\frac{1}{42} n - \frac{1}{42} n^2 - \frac{1}{7} n^3 + \frac{1}{7} n^4 + \frac{5}{14} n^5 + \frac{1}{7} n^6 \right)$$

$$\sum_{k=1}^n k^7 = (n+1) \left(\frac{1}{12} n^2 - \frac{1}{12} n^3 - \frac{5}{24} n^4 + \frac{5}{24} n^5 + \frac{3}{8} n^6 + \frac{1}{8} n^7 \right)$$

6.Teorema 1B

$$A_m^{-1} = \overline{G}_m$$

Si dimostra che i coefficienti dei polinomi per il calcolo della somma di $n-1$ potenze di interi successivi si possono ottenere invertendo una matrice triangolare ricavabile dal triangolo di Tartaglia eliminando l'ultimo elemento di ogni riga.

Prendiamo in considerazione una matrice quadrata, come la precedente ma a segni alternati, di m righe e m colonne così definita:

$$A_m : a_{j,k} = \begin{cases} 0 & \text{se } k > j \\ \binom{j}{k-1} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Questa risulta essere una matrice triangolare in cui compare il triangolo di Tartaglia privato dell'ultimo elemento di ogni riga. La sua diagonale principale è formata dalla successione degli interi positivi il cui prodotto ($m!$) ne dà il determinante.

Si ha

$$\begin{aligned} A_m * \begin{pmatrix} 1 + \sum_{i=1}^{n-1} i^0 \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^1 \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^2 \\ \dots \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^{m-1} \end{pmatrix} &= A_m * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + A_m * \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} i^0 \\ i^1 \\ i^2 \\ \dots \\ i^{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^n A_m * \begin{pmatrix} i^0 \\ i^1 \\ i^2 \\ \dots \\ i^{m-1} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} (i+1)^1 - i^1 \\ (i+1)^2 - i^2 \\ (i+1)^3 - i^3 \\ \dots \\ (i+1)^m - i^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n^1 - 1 \\ n^2 - 1 \\ n^3 - 1 \\ \dots \\ n^m - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n^2 \\ n^3 \\ \dots \\ n^m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nei primi due passaggi si è applicata la proprietà distributiva. Nel terzo, quando si è moltiplicata la matrice A_m per il vettore di potenze si ottiene:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^m a_{j,k} * i^{k-1} &= \sum_{k=1}^j \binom{j}{k-1} * i^{k-1} = \\
&= -i^j + \sum_{k=1}^{j+1} \binom{j}{k-1} * i^{k-1} = \\
&= -i^j + (i+1)^j = (i+1)^j - i^j
\end{aligned}$$

Dunque si è dimostrato che:

$$A_m * \begin{pmatrix} 1 + \sum_{i=1}^{n-1} i^0 \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^1 \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^2 \\ \dots \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n^2 \\ n^3 \\ \dots \\ n^m \end{pmatrix}$$

Moltiplicando i due membri a sinistra per l'inversa di A_m otteniamo:

$$\begin{pmatrix} 1 + \sum_{i=1}^{n-1} i^0 \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^1 \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^2 \\ \dots \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^{m-1} \end{pmatrix} = A_m^{-1} \begin{pmatrix} n \\ n^2 \\ n^3 \\ \dots \\ n^m \end{pmatrix}$$

che fornisce la nota variante ai famosi polinomi per il calcolo delle somme di potenze di interi successivi.

Esempio con $m=11$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 28 & 56 & 70 & 56 & 28 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & 36 & 84 & 126 & 126 & 84 & 36 & 9 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & 45 & 120 & 210 & 252 & 210 & 120 & 45 & 10 & 0 \\ 1 & 11 & 55 & 165 & 330 & 462 & 462 & 330 & 165 & 55 & 11 \end{pmatrix}$$

Applicando il teorema:

$$\begin{pmatrix} 1 + \sum_{i=1}^{n-1} i^0 \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^1 \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^2 \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^3 \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^4 \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^5 \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^6 \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^7 \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^8 \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^9 \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{30} & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{12} & 0 & \frac{5}{12} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{42} & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & 0 & -\frac{7}{24} & 0 & \frac{7}{12} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{30} & 0 & \frac{2}{9} & 0 & -\frac{7}{15} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{20} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{7}{10} & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{5}{66} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & \frac{5}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{11} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \\ n^5 \\ n^6 \\ n^7 \\ n^8 \\ n^9 \\ n^{10} \\ n^{11} \end{pmatrix}$$

O in forma equivalente:

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^0 = n$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^1 = -\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{1}{6}n - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^3 = \frac{1}{4}n^2 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^4$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^4 = -\frac{1}{30}n + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{5}n^5$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^5 = -\frac{1}{12}n^2 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{2}n^5 + \frac{1}{6}n^6$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^6 = \frac{1}{42}n - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{7}n^7$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^7 = \frac{1}{12}n^2 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{7}{12}n^6 - \frac{1}{2}n^7 + \frac{1}{8}n^8$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^8 = -\frac{1}{30}n + \frac{2}{9}n^3 - \frac{7}{15}n^4 + \frac{2}{3}n^6 - \frac{1}{2}n^8 + \frac{1}{9}n^9$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^9 = -\frac{3}{20}n^2 + \frac{1}{2}n^4 - \frac{7}{10}n^6 + \frac{3}{4}n^8 - \frac{1}{2}n^9 + \frac{1}{10}n^{10}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^{10} = \frac{5}{66}n - \frac{1}{2}n^3 + n^5 - n^7 + \frac{5}{6}n^9 - \frac{1}{2}n^{10} + \frac{1}{11}n^{11}$$

Notare che questi polinomi differiscono da quelli stampati in *Ars Conjectandi* solo per il segno, in ogni polinomio, del coefficiente del monomio secondo per elevazione di grado.

6.2 Polinomi fattorizzati

I polinomi per le somme di potenza possono essere considerati anche in questa forma:

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^1 = (n-1) \frac{1}{2} n$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = (n-1) \left(-\frac{1}{6} n + \frac{1}{3} n^2 \right)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^3 = (n-1) \left(-\frac{1}{4} n^2 + \frac{1}{4} n^3 \right)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^4 = (n-1) \left(\frac{1}{30} n + \frac{1}{30} n^2 - \frac{3}{10} n^3 + \frac{1}{5} n^4 \right)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^5 = (n-1) \left(\frac{1}{12} n^2 + \frac{1}{12} n^3 - \frac{1}{3} n^4 + \frac{1}{6} n^5 \right)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^6 = (n-1) \left(-\frac{1}{42} n - \frac{1}{42} n^2 + \frac{1}{7} n^3 + \frac{1}{7} n^4 - \frac{5}{14} n^5 + \frac{1}{7} n^6 \right)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^7 = (n-1) \left(-\frac{1}{12} n^2 - \frac{1}{12} n^3 + \frac{5}{24} n^4 + \frac{5}{24} n^5 - \frac{3}{8} n^6 + \frac{1}{8} n^7 \right)$$

che in forma matriciale equivale a:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n-1} i^1 \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^2 \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^3 \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^4 \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^5 \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^6 \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^7 \end{pmatrix} = \overline{E}_7 \cdot \begin{pmatrix} (n-1)n \\ (n-1)n^2 \\ (n-1)n^3 \\ (n-1)n^4 \\ (n-1)n^5 \\ (n-1)n^6 \\ (n-1)n^7 \end{pmatrix} \quad \text{ove } \overline{E}_7 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{30} & \frac{1}{30} & -\frac{3}{10} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{42} & -\frac{1}{42} & +\frac{1}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{5}{14} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & +\frac{5}{24} & \frac{5}{24} & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

6.3 Teorema 1BU

$$(A_m + U_m)^{-1} = \overline{E}_m$$

Si dimostra che, scomponendo i polinomi per il calcolo della somma di $n-1$ potenze di interi successivi nel prodotto tra $n-1$ e un altro polinomio, i coefficienti di quest'ultimo si ottengono invertendo la somma tra la matrice unitaria e la matrice definita come nel teorema 1B

Applicando la proprietà distributiva si ha:

$$(U_m + A_m) \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n-1} i^1 \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^2 \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^3 \\ \dots \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n-1} i^1 \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^2 \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^3 \\ \dots \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^m \end{pmatrix} + A_m \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n-1} i^1 \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^2 \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^3 \\ \dots \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^m \end{pmatrix} =$$

e anche:

$$= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n-1} i \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^2 \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^3 \\ \dots \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^m \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{n-1} A_m \begin{pmatrix} i \\ i^2 \\ i^3 \\ \dots \\ i^m \end{pmatrix} =$$

Ora tenendo presente quanto già visto nel teorema 1B risulta:

$$\sum_{k=1}^m a_{j,k} i^k = i \sum_{i=1}^m a_{j,k} i^{k-1} = i((i+1)^j - i^j)$$

e quindi

$$= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n-1} i \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^2 \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^3 \\ \dots \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^m \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{n-1} \begin{pmatrix} i((i+1) - i) \\ i((i+1)^2 - i^2) \\ i((i+1)^3 - i^3) \\ \dots \\ i((i+1)^m - i^m) \end{pmatrix} =$$

Infine essendo:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1} i((i+1)^m - i^m) &= 1 \cdot 2^m - 1 \cdot 1^m + 2 \cdot 3^m - 2 \cdot 2^m + 3 \cdot 4^m - 3 \cdot 3^m + \dots \\
&\dots + (n-1)n^m - (n-1)(n-1)^m = \\
&= -1^m - 2^m - 3^m - \dots - (n-1)^m + (n-1)n^m = \\
&= (n-1)n^m - \sum_{i=1}^{n-1} i^m
\end{aligned}$$

si ottiene

$$= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n-1} i \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^2 \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^3 \\ \dots \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n(n-1) - \sum_{i=1}^{n-1} i \\ n^2(n-1) - \sum_{i=1}^{n-1} i^2 \\ n^3(n-1) - \sum_{i=1}^{n-1} i^3 \\ \dots \\ n^m(n-1) - \sum_{i=1}^{n-1} i^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (n-1)n \\ (n-1)n^2 \\ (n-1)n^3 \\ \dots \\ (n-1)n^m \end{pmatrix}$$

Per la transitività dell'uguaglianza si è dimostrato che:

$$(U_m + A_m) \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n-1} i^1 \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^2 \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^3 \\ \dots \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (n-1)n \\ (n-1)n^2 \\ (n-1)n^3 \\ \dots \\ (n-1)n^m \end{pmatrix}$$

Avendo la matrice triangolare, risultato della somma, un determinante non nullo ($m!$), poniamo

$$\overline{E}_m = (A_m + U_m)^{-1}$$

e moltiplicando per questa matrice quadrata $m \times m$, a sinistra, i due membri dell'equazione ottenuta si esplicita il vettore delle somme. Si ottiene quindi quanto si voleva dimostrare:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n-1} i^1 \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^2 \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^3 \\ \dots \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^m \end{pmatrix} = \overline{E}_m \cdot \begin{pmatrix} (n-1)n \\ (n-1)n^2 \\ (n-1)n^3 \\ \dots \\ (n-1)n^m \end{pmatrix}$$

Esempio caso $m=7$

$$U_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_7 + U_7 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 7 & 0 \\ 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 8 \end{pmatrix}$$

per cui calcolando

$$\overline{E}_7 = (A_7 + U_7)^{-1}$$

per il teorema dimostrato risulta:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n-1} i^1 \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^2 \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^3 \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^4 \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^5 \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^6 \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{30} & \frac{1}{30} & -\frac{3}{10} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{42} & -\frac{1}{42} & +\frac{1}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{5}{14} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & +\frac{5}{24} & \frac{5}{24} & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (n-1)n \\ (n-1)n^2 \\ (n-1)n^3 \\ (n-1)n^4 \\ (n-1)n^5 \\ (n-1)n^6 \\ (n-1)n^7 \end{pmatrix}$$

e in forma equivalente;

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^1 = (n-1) \frac{1}{2} n$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = (n-1) \left(-\frac{1}{6} n + \frac{1}{3} n^2 \right)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^3 = (n-1) \left(-\frac{1}{4} n^2 + \frac{1}{4} n^3 \right)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^4 = (n-1) \left(\frac{1}{30} n + \frac{1}{30} n^2 - \frac{3}{10} n^3 + \frac{1}{5} n^4 \right)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^5 = (n-1) \left(\frac{1}{12} n^2 + \frac{1}{12} n^3 - \frac{1}{3} n^4 + \frac{1}{6} n^5 \right)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^6 = (n-1) \left(-\frac{1}{42} n - \frac{1}{42} n^2 + \frac{1}{7} n^3 + \frac{1}{7} n^4 - \frac{5}{14} n^5 + \frac{1}{7} n^6 \right)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^7 = (n-1) \left(-\frac{1}{12} n^2 - \frac{1}{12} n^3 + \frac{5}{24} n^4 + \frac{5}{24} n^5 - \frac{3}{8} n^6 + \frac{1}{8} n^7 \right)$$

7. Corollari

Abbiamo dimostrato che:

$\overline{A}_m^{-1} = G_m$	$A_m^{-1} = \overline{G}_m$
-----------------------------	-----------------------------

Vediamo ora alcune conseguenze dei due teoremi.

Per il teorema di Laplace sul calcolo delle matrici inverse si ha:

$$g_{m,j} = (-1)^{m+j} \frac{|\bar{A}_{j,m}|}{|\bar{A}_m|} \quad e \text{ dualmente : } \bar{g}_{m,j} = (-1)^{m+j} \frac{|A_{j,m}|}{|A_m|}$$

Le lettere minuscole con i relativi indici sono gli elementi delle corrispondenti matrici indicate da lettere maiuscole. Le matrici con doppio indice sono il complemento algebrico delle matrici di riferimento rispetto all'elemento indicato dagli indici di riga e colonna che sono invertiti per via della trasposizione nel processo di inversione di matrice.

In particolare:

7.1 Coefficienti di grado massimo

$$g_{m,m} = (-1)^{2m} \frac{|\bar{A}_{m,m}|}{|\bar{A}_m|} = \frac{|\bar{A}_{m-1}|}{|\bar{A}_m|} = \frac{(m-1)!}{m!} = \frac{1}{m}$$

$$e \text{ dualmente : } \bar{g}_{m,m} = \frac{|A_{m-1}|}{|A_m|} = \frac{(m-1)!}{m!} = \frac{1}{m}$$

in questo caso il complemento algebrico è la matrice con indice immediatamente precedente e i determinanti di queste due matrici triangolari si ottengono moltiplicando gli elementi della diagonale principale.

7.2 Coefficienti dei monomi secondi per grado

Altrettanto immediato è il calcolo di:

$$g_{m,m-1} = (-1)^{2m-1} \frac{|\bar{A}_{m-1,m}|}{|\bar{A}_m|} = -\frac{\binom{m}{2}(m-2)!}{m!} = -\frac{1}{2}$$

$$e \text{ dualmente : } \bar{g}_{m-1,m} = -\frac{|A_{m-1,m}|}{|A_m|} = -\frac{\binom{m}{2}(m-2)!}{m!} = -\frac{1}{2}$$

anche in questo caso il complemento algebrico risulta una matrice triangolare per cui il calcolo è piuttosto semplice. Negli altri casi relativi alla stessa riga

invece si avranno matrici non più triangolari per cui i calcoli risulteranno più complicati e, quindi, più difficili da generalizzare. Viene quindi dimostrato e generalizzato quanto già osservato negli esempi mostrati.

7.3 Differenze tra la matrice G e la sua alternata

Abbiamo mostrato che

$$\sum_{k=0}^n k^m = \dots + \frac{1}{2}n^m + \frac{1}{m+1}n^{m+1}$$

da cui si può ricavare:

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^m = -n^m + \sum_{k=0}^n k^m = \dots - \frac{1}{2}n^m + \frac{1}{m+1}n^{m+1}$$

che non solo conferma il valore opposto trovato negli esempi precedentemente mostrati, ma dimostra che le due serie di polinomi per il calcolo delle somme di potenze di interi successivi differiscono solo per il monomio secondo per grado, perciò le due matrici corrispondenti differiscono solo di un valore per riga. La loro differenza è quindi una matrice di quasi tutti zeri così definibile:

$$G_m - \bar{G}_m : g_{j,k} - \bar{g}_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{se } j = k + 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

7.4 Teorema sulla ripetizione di zeri nella matrice G e nella sua alternata.

Abbiamo visto precedentemente che salvo eccezioni esaminate i valori delle due matrici coincidono. Sappiamo inoltre che le matrici dei coefficienti dei polinomi per le somme di potenze di interi successivi, essendo inverse di matrici in relazione di alternanza (vedi 3.2), godono della stessa proprietà per cui per $j+k$ dispari e non $j=k+1$ abbiamo:

$$g_{j,k} = \bar{g}_{j,k} \quad \wedge \quad g_{j,k} = (-1)\bar{g}_{j,k} \quad \rightarrow \quad g_{j,k} = \bar{g}_{j,k} = 0$$

pertanto, in ogni colonna , salvo un'eccezione, gli elementi con indice di riga più indice di colonna dispari dovranno essere uguali a zero

7.5 Numeri di Bernoulli

Per quanto visto precedentemente, le prime colonne delle due matrici di coefficienti differiscono tra loro solo per il segno dell'elemento della seconda riga. Questa due colonne danno luogo a due sequenze di numeri quasi identiche chiamate numeri di Bernoulli. Il nome fu assegnato nel 1721, poco dopo la pubblicazione di "Ars Conjectandi", da Abraham de Moivre (1667-1754) anche se all'epoca, come Bernoulli stesso avevo indicato, si considerava la sequenza dal terzo elemento in poi. Oggi molti autori preferiscono dare due definizioni distinte:

$$B_n^+ = g_{n+1,1}$$

Questa è la variante positiva (+½)

$$B_n^- = \bar{g}_{n+1,1}$$

e quest'altra è invece la variante negativa (-½). Quest'ultima oggi sembra essere la più diffusa tra quelli che preferiscono dare una sola sequenza.

7.6 I coefficienti dei monomi di primo grado

Calcolando come per gli altri coefficienti:

$$g_{m,1} = (-1)^{m+1} \frac{|\bar{A}_{1,m}|}{|\bar{A}_m|} = (-1)^{m+1} \frac{|\bar{A}_{1,m}|}{m!}$$

$$\bar{g}_{m,1} = (-1)^{m+1} \frac{|A_{1,m}|}{|A_m|} = (-1)^{m+1} \frac{|A_{1,m}|}{m!}$$

I complementi algebrici ritagliano le matrici eliminando prima riga e ultima

colonna. Nel secondo caso si ottiene questa matrice:

$$C_n : c_{j,k} = \begin{cases} 0 & \text{se } k > j + 1 \\ \binom{j+1}{k-1} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Nel primo caso invece compare una matrice a segni alterni nelle posizioni con somma riga più colonna pari. Siccome di questa matrice interessa solo il determinante conviene considerare la sua alternata che non lo muta. La nuova matrice è a segni tutti negativi. Moltiplicando tutti gli elementi delle righe per -1 si ottiene la matrice C_{m-1} ma il determinante risulta così moltiplicato per -1 $m-1$ volte. Dunque cambia segno quando $m-1$ è dispari.

$$g_{m,1} = (-1)^{m+1} \frac{|\bar{A}_{1,m}|}{m!} = (-1)^{m+1} \frac{|C_{m-1}| * (-1)^{m-1}}{m!} = \frac{|C_{m-1}|}{m!}$$

$$\bar{g}_{m,1} = (-1)^{m+1} \frac{|A_{1,m}|}{m!} = (-1)^{m+1} \frac{|C_{m-1}|}{m!}$$

$$B_n^+ = \frac{|C_n|}{(n+1)!} \quad B_n^- = (-1)^n \frac{|C_n|}{(n+1)!}$$

7.7 Formula diretta per ricavare i numeri di Bernoulli dal triangolo di Tartaglia

Abbiamo dunque ricavato la seguente formula

$$B_n^+ = \frac{|C_n|}{(n+1)!}$$

Ecco degli esempi:

$$B_6^+ = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 0 \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 \\ 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 \end{vmatrix}}{7!} = \frac{120}{5040} = \frac{1}{42}$$

7.7.1 Alternativa senza denominatore

Per le proprietà dei determinanti la formula precedente può essere modificata eliminando il denominatore e variando gli elementi della matrice di n righe e n colonne nel seguente modo:

$$a_{i,k} = \begin{cases} 0 & \text{se } k > 1 + i \\ \binom{i+1}{k-1} \frac{1}{i+1} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

7.7.2 Adattamento per calcolo separati di numeratore e denominatore già ridotti ai minimi termini

Il teorema di Clausen-Von Staudt permette di calcolare facilmente il denominatore nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \text{den}(B_n) &= \prod_{i=1}^{n+1} f(n, i) \\ f(n, k) &= \begin{cases} k & \text{se } k \text{ primo} \wedge (k-1) | n \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi il numeratore può essere calcolato direttamente da:

$$num(B_n) = |A_n|$$

dove gli elementi della matrice sono modificati nel seguente modo:

$$a_{i,k} = \begin{cases} 0 & \text{se } k > 1 + i \\ \binom{i+1}{k-1} & \text{se } i+1 \text{ primo} \wedge i|n \\ \binom{i+1}{k-1} \frac{1}{i+1} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

7.7.3 Algoritmo

Per calcolare la matrice di Hessenberg di ordine pari, che dà i numeri di Bernoulli, la si renda triangolare nel seguente modo

1°fase - si scambi la prima con l'ultima riga. Poi la ex prima riga si scambi con la precedente per $n-2$ volte fino a portarla al secondo posto. Si cambi segno alla prima riga per compensare il numero dispari di inversioni e non mutare il determinante.

2°fase-Ora sommando la prima riga con una riga di pari lunghezza (non calcolando gli elementi nulli) opportunamente moltiplicata per un opportuno fattore si accorci la prima riga. In $n/2$ passaggi si otterrà una matrice triangolare con determinante invariato il cui valore si calcola facilmente moltiplicando gli elementi della diagonale principale.

Ecco come esempio di quanto detto il calcolo del numeratore di B16 su foglio di calcolo

120,5666	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	3	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,25	1	1,5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	5	10	10	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,166666	1	2,5	3,33333	2,5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,142857	1	3	5	5	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,125	1	3,5	7	8,75	7	3,5	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0,111111	1	4	9,33333	14	14	9,33333	4	1	0	0	0	0	0	0	0
0,1	1	4,5	12	21	25,2	21	12	4,5	1	0	0	0	0	0	0
0,090909	1	5	15	30	42	42	30	15	5	1	0	0	0	0	0
0,083333	1	5,5	18,3333	41,25	66	77	66	41,25	18,3333	5,5	1	0	0	0	0
0,076923	1	6	22	55	99	132	132	99	55	22	6	1	0	0	0
0,071428	1	6,5	26	71,5	143	214,5	245,142	214,5	143	71,5	26	6,5	1	0	0
0,066666	1	7	30,3333	91	200,2	333,666	429	429	333,666	200,2	91	30,3333	7	1	0
0,0625	1	7,5	35	113,75	273	500,5	715	804,375	715	500,5	273	113,75	35	7,5	1

```

to aggiorna :n
make "riga []
repeat :n [make "riga lput item repcount :terza :riga]
end

to cobin :m :n
if or (:m=:n) (:n=0) [output 1]
if or (:m=:n=1) (:n=1) [output :m]
;;output (cobin :m-1 :n)+(cobin :m-1 :n-1) lento
output (fatdiscend :m :n)/fatdiscend :n :n-1
end

to denombenoulli :m
make "fat 1
repeat :m [if and primo repcount+1 div :m repcount
[make "fat :fat*(repcount+1)]]
output :fat
end

to denomdiag :m
make "fat 1
repeat :m-1 [if and primo repcount+1 div :m repcount
[make "fat :fat*(repcount+1)]]
output :fat
end

to div :m :n
ifelse (:n*int :m/:n)=:m [output "true][output "false]
end

to fai :i
make "conta :i
make "indice :i
fairiga :i+1
faisconda :conta
;;make "f -(item :conta :riga)/(item :conta :seconda)

```

```

falterza
make "conta :conta-1
aggiorna :conta
faisconda :conta
falterza
make "conta :conta-2
aggiorna :conta
make "volte (:conta-1)/2
repeat :volte [
faisconda :conta
falterza
make "conta :conta-2
aggiorna :conta]
show sentence "B :indice
show "numeratore:
show round (item 1 :riga)*(denomdiag :indice)
show "denominatore:
show denombroulli :indice
end

to fairiga :k
make "indice :k-1
make "riga []
ifelse and primo :k div :indice :k-1 [make "d 1][make "d :k]
repeat :k-1 [make "riga lput -(cabin :k repcount-1)/:d :riga]
end

to faisconda :k
make "seconda []
;;ifelse :k>:indice [make "segno -1][make "segno 1]
ifelse and primo :k div :indice :k-1 [make "d 1][make "d :k]
repeat :k [make "seconda lput (cabin :k repcount-1)/:d :seconda]
make "f -(item :conta :riga)/(item :conta :seconda)
end

to falterza
make "terza []
repeat :conta [make "terza lput (:f*item repcount :seconda)+(item repcount :riga) :terza]
end

to fatdiscend :m :n
if :n=1 [output :m]
make "fat :m
repeat :n-1 [make "fat :fat*(:m-repcount)]
output :fat
end

to primo :m
make "fino int sqrt :m
if :m=2 [output "true]
repeat :fino [ if div :m repcount+1 [output "false ]]
output "true
end

```

Infine il programma in mswLogo per calcolo di numeratore e denominatore. Si può scaricare il programma dalla Softronix, copiare e incollare nell'edit e comandare "fai 16" o altro numero pari maggiore di 2

7.8 Formule ricorsive

Essendo queste matrici inverse

$\overline{A}_m^{-1} = G_m$	$A_m^{-1} = \overline{G}_m$
-----------------------------	-----------------------------

Il loro prodotto righe per colonne deve dare:

$\sum_{k=1}^m \overline{a}_{m,k} g_{k,1} = \sum_{k=1}^m \binom{m}{k-1} (-1)^{m+k} B_{k-1}^+ = \begin{cases} 1 & \text{se } m = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$	$\sum_{k=1}^m a_{m,k} \overline{g}_{k,1} = \sum_{k=1}^m \binom{m}{k-1} B_{k-1}^- = \begin{cases} 1 & \text{se } m = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$
--	---

Queste formule per $m=1$ danno il valore di $B_0=1$ per $m>1$ portano ad una formula che fornisce ricorsivamente B_n in funzione dei precedenti valori. Per esempio:

$\sum_{k=1}^m \binom{m}{k-1} B_{k-1}^- = \binom{m}{m-1} B_{m-1}^- + \sum_{k=1}^{m-1} \binom{m}{k-1} B_{k-1}^- = 0$
--

da cui si ricava:

$B_{m-1}^- = -\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m-1} \binom{m}{k-1} B_{k-1}^-$
--

o equivalentemente:

$$B_n^- = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k^-$$

8. La formula rivelata in “ars conjectandi”

Nella pagina del libro di Jacob Bernoulli che abbiamo mostrato è data la seguente formula che qui esprimiamo in simboli attuali:

$$\sum_{k=1}^n k^c = \frac{n^{c+1}}{c+1} + \frac{1}{2}n^c + \sum_{k=2}^c \frac{B_k}{k!} c^{k-1} n^{c-k+1}$$

da cui si deduce facilmente anche

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^c = \frac{n^{c+1}}{c+1} - \frac{1}{2}n^c + \sum_{k=2}^c \frac{B_k}{k!} c^{k-1} n^{c-k+1}$$

Notare che l'indice dei numeri di Bernoulli parte da due per cui è irrilevante specificare con il segno in apice a quale variante ci si riferisca.

Queste formule possono essere espresse anche in forma più compatta:

$$\sum_{k=1}^n k^c = \frac{1}{c+1} \sum_{k=0}^c \binom{c+1}{k} B_k^+ n^{c+1-k},$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^c = \frac{1}{c+1} \sum_{k=0}^c \binom{c+1}{k} B_k^- n^{c+1-k},$$

chi invece si ostina a voler privilegiare una delle due varianti dei numeri di Bernoulli dovrà complicare le cose usando una di queste:

$$\sum_{k=1}^n k^c = \frac{1}{c+1} \sum_{k=0}^c (-1)^k \binom{c+1}{k} B_k^- n^{c+1-k}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^c = \frac{1}{c+1} \sum_{k=0}^c (-1)^k \binom{c+1}{k} B_k^+ n^{c+1-k}$$

Naturalmente dato l'annullarsi dei numeri con indice dispari maggiori di 1 il fattore aggiunto serve solo a correggere il segno di $\frac{1}{2}$. Possiamo riassumere in forma didattica, come esempio relativo ai primi casi, quanto evidenziato dal libro di Bernoulli come segue:

$$1^0 + 2^0 + \dots + n^0 = \frac{1}{1} (1B_0 n)$$

$$1^1 + 2^1 + \dots + n^1 = \frac{1}{2} (2B_1^+ n^1 + 1B_0 n^2)$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{3} (3B_2 n + 3B_1^+ n^2 + 1B_0 n^3)$$

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4} (4B_3 n + 6B_2 n^2 + 4B_1^+ n^3 + 1B_0 n^4)$$

$$1^4 + 2^4 + \dots + n^4 = \frac{1}{5} (5B_4 n + 10B_3 n^2 + 10B_2 n^3 + 5B_1^+ n^4 + 1B_0 n^5)$$

$$1^5 + 2^5 + \dots + n^5 = \frac{1}{6} (6B_5 n + 15B_4 n^2 + 20B_3 n^3 + 15B_2 n^4 + 6B_1^+ n^5 + 1B_0 n^6)$$

Questo esempio fa intravedere la matrice Z_6 caso particolare della matrice di c righe e c colonne definibile come:

$$Z_c : z_{i,k} = \begin{cases} 0 & \text{se } k > i \\ \binom{i}{k} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Alla luce di tutto ciò possiamo dare una nuova definizione alle matrici già considerate:

$$G_c : g_{i,k} = \frac{1}{i} z_{i,k} B_{i-k}^+$$

$$\overline{G}_c : \overline{g}_{i,k} = \frac{1}{i} z_{i,k} B_{i-k}^-$$

Jakob Bernoulli non poté dimostrare il suo risultato. Noi invece, data l'unicità della matrice inversa, potremo farlo dimostrando che con le nuove definizioni risulta ancora:

$$G_c^{-1} = \overline{A}_c \quad \overline{G}_c^{-1} = A_c$$

Sapendo, come dimostrato, che i numeri di Bernoulli con indice dispari superiori a uno si annullano si vede facilmente che le due matrici sono una l'alternata dell'altra (vedi paragrafo 3). Per questo sarà sufficiente dimostrare solo una delle due uguaglianze, l'altra sarà un'immediata conseguenza per quanto visto in 3.2. Procedendo per induzione si verifica facilmente il caso iniziale in cui $c=1$:

$$\overline{G}_1 * A_1 = U_1$$

Si suppone poi la relazione vera per indice $c-1$:

$$\overline{G}_{c-1} * A_{c-1} = U_{c-1}$$

Dobbiamo quindi dimostrare che:

$$\overline{G}_c * A_c = U_c$$

Rispetto al caso precedente supposto vero, le nuove matrici da moltiplicare per ottenere la matrice unitaria, differiscono solo per l'ultima riga costituita da elementi diversi da zero e per l'ultima colonna composta di tutti zero salvo l'ultimo elemento. Dato che le $c-1$ righe della prima matrice acquistano uno 0 finale il prodotto con le varie colonne darà, con le prime $c-1$ colonne, i risultati precedenti cioè gli zeri e gli uno della matrice unitaria di ordine $c-1$. Quando le prime $c-1$ righe si moltiplicano per l'ultima colonna, essendoci uno zero per ogni addendo il risultato si annulla. Dunque nelle prime $c-1$ righe i valori trovati sono compatibili con l'elemento neutro del prodotto tra matrici. Rimane da mostrare che anche i valori dell'ultima riga sono zero salvo l'ultimo che è uno.

$$\sum_{i=1}^c \overline{g}_{c,i} a_{i,j} = \sum_{i=1}^c \frac{1}{c} z_{c,i} B_{c-i}^- a_{i,j} =$$

tenendo conto degli zeri della colonna j e di un'identità binomiale

$$= \frac{1}{c} \sum_{i=j}^c \binom{c}{i} B_{c-i}^- \binom{i}{j-1} = \frac{1}{c} \binom{c}{j-1} \sum_{i=j}^c \binom{c-j+1}{c-i} B_{c-i}^-$$

A questo punto si verifica facilmente che con $j=c$ si ottiene B_0 e quindi 1, mentre con $j < c$ si ottiene una sommatoria nulla per quanto già dimostrato in 7.8. Essendo dunque la matrice prodotto uguale all'elemento neutro abbiamo dimostrato che i coefficienti per la somma delle potenze di interi successivi possono essere espressi in funzione dei numeri di Bernoulli come indicato in "Ars conjectandi".

8.1 Due casi particolari per formule ricorsive

E' possibile utilizzare le formule dimostrate e qui riportate per ottenere, come casi particolari, delle formule ricorsive generanti i numeri di Bernoulli. Molto

probabilmente storicamente sono le prime ad essere state usate ma ora, presumibilmente per la concorrenza di altre più efficienti, sembrano scomparse dai trattati.

$$\sum_{k=1}^n k^c = \frac{1}{c+1} \sum_{k=0}^c \binom{c+1}{k} B_k^+ n^{c+1-k},$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^c = \frac{1}{c+1} \sum_{k=0}^c \binom{c+1}{k} B_k^- n^{c+1-k},$$

Si ricorda che il + e il - all'apice di B indicano rispettivamente la variante $B_1 = \frac{1}{2}$ e quella $B_1 = -\frac{1}{2}$ dei numeri di Bernoulli

Se nella prima equazione prendiamo $n=1$ e nella seconda $n=2$ otteniamo le seguenti equazioni:

$$1 = \frac{1}{c+1} \sum_{k=0}^c \binom{c+1}{k} B_k^+$$

$$1 = \frac{1}{c+1} \sum_{k=0}^c \binom{c+1}{k} B_k^- 2^{c+1-k}$$

Da cui esplicitando si ottengono le due seguenti formule ricorsive:

$$B_c = 1 - \frac{1}{c+1} \sum_{k=0}^{c-1} \binom{c+1}{k} B_k^+$$

$$B_c = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{c+1} \sum_{k=0}^{c-1} \binom{c+1}{k} B_k^- 2^{c+1-k}$$

Se nella prima equazione effettuiamo la sostituzione

$$B_1^+ = 1 + B_1^-$$

ritroviamo la formula ricorsiva già considerata in 7.8 mentre la seconda equazione si può semplificare in

$$B_c = \frac{1}{2} - \frac{1}{c+1} \sum_{k=0}^{c-1} \binom{c+1}{k} B_k 2^{c-k}$$

9.L'algoritmo di Ada

Nel 1842 il matematico ingegnere Charles Babbage (1791-1881) tenne un seminario presso l'università di Torino, e Luigi Menabrea, giovane ingegnere italiano, pubblicò un libro in francese sul progetto⁴. Babbage incaricò Ada Lovelace nata Byron, figlia del noto poeta romantico che alla sua nascita l'aveva abbandonata insieme alla madre. Ada, allevata dalla madre che l'aveva avviata allo studio dei numeri, era diventata una stimata matematica e collaborava con l'ideatore della macchina analitica che ne lodava le capacità appellandola "incantatrice di numeri". Il saggio fu quindi tradotto e arricchito dalle note di Ada che alla fine portarono le pagine complessive a più che raddoppiare.

⁴ Luigi Federico. Menabrea, *Notions sur la machine analytique de Charles Babbage*, 1842, Bibliothèque Universelle di Ginevra

Diagram for the computation by the Engine of the Numbers of Bernoulli. See Note G. (page 722 *et seq.*)

Number of Operation.	Nature of Operation.	Variables acted upon.	Variables receiving results.	Indication of change in the value on any Variable.	Statement of Results.	Data.												Working Variables.												Result Variables.			
						V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8	V_9	V_{10}	V_{11}	V_{12}	V_{13}	V_{14}	V_{15}	V_{16}	V_{17}	V_{18}	V_{19}	V_{20}	V_{21}	V_{22}	V_{23}	V_{24}				
						1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24				
1	$\times$	$V_2 \times V_3$	V_4	V_5	$V_6 = V_2$	$2n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24			
2	$-$	$V_4 - V_5$	V_6	V_7	$V_8 = V_4$	$2n-1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24			
3	$+$	$V_6 + V_7$	V_8	V_9	$V_{10} = V_6$	$2n+1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24			
4	$+$	$V_8 + V_9$	V_{10}	V_{11}	$V_{12} = V_8$	$2n+1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24			
5	$+$	$V_{10} + V_{11}$	V_{12}	V_{13}	$V_{14} = V_{10}$	$2n+1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24			
6	$-$	$V_{12} - V_{13}$	V_{14}	V_{15}	$V_{16} = V_{12}$	$2n-1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24			
7	$-$	$V_{14} - V_{15}$	V_{16}	V_{17}	$V_{18} = V_{14}$	$2n-1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24			
8	$+$	$V_{16} + V_{17}$	V_{18}	V_{19}	$V_{20} = V_{16}$	$2n+1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24			
9	$+$	$V_{18} + V_{19}$	V_{20}	V_{21}	$V_{22} = V_{18}$	$2n+1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24			
10	$\times$	$V_{20} \times V_{21}$	V_{22}	V_{23}	$V_{24} = V_{20}$	$2n+1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24			
11	$+$	$V_{22} + V_{23}$	V_{24}	V_{25}	$V_{26} = V_{22}$	$2n+1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24			
12	$-$	$V_{24} - V_{25}$	V_{26}	V_{27}	$V_{28} = V_{24}$	$2n-1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24			
13	$-$	$V_{26} - V_{27}$	V_{28}	V_{29}	$V_{30} = V_{26}$	$2n-1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24			
14	$+$	$V_{28} + V_{29}$	V_{30}	V_{31}	$V_{32} = V_{28}$	$2n+1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24			
15	$+$	$V_{30} + V_{31}$	V_{32}	V_{33}	$V_{34} = V_{30}$	$2n+1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24			
16	$\times$	$V_{32} \times V_{33}$	V_{34}	V_{35}	$V_{36} = V_{32}$	$2n+1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24			
17	$-$	$V_{34} - V_{35}$	V_{36}	V_{37}	$V_{38} = V_{34}$	$2n-1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24			
18	$+$	$V_{36} + V_{37}$	V_{38}	V_{39}	$V_{40} = V_{36}$	$2n+1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24			
19	$+$	$V_{38} + V_{39}$	V_{40}	V_{41}	$V_{42} = V_{38}$	$2n+1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24			
20	$\times$	$V_{40} \times V_{41}$	V_{42}	V_{43}	$V_{44} = V_{40}$	$2n+1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24			
21	$\times$	$V_{42} \times V_{43}$	V_{44}	V_{45}	$V_{46} = V_{42}$	$2n+1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24			
22	$+$	$V_{44} + V_{45}$	V_{46}	V_{47}	$V_{48} = V_{44}$	$2n+1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24			
23	$-$	$V_{46} - V_{47}$	V_{48}	V_{49}	$V_{50} = V_{46}$	$2n-1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24			
Here follows a repetition of Operations thirteen to twenty-three.																																	
24	$+$	$V_{50} + V_{51}$	V_{52}	V_{53}	$V_{54} = V_{50}$	$2n+1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24			
25	$+$	$V_{52} + V_{53}$	V_{54}	V_{55}	$V_{56} = V_{52}$	$2n+1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24			

Nota G di Ada Lovelace. Algoritmo per il calcolo dei numeri di Bernoulli in un programma pensato per la macchina analitica di Charles Babbage, un primo computer basato sulla meccanica che per i suoi alti costi mai fu realizzato.

Nella nota G. si può vedere, come era in "Ars conjectandi", che non vengono considerati tutti quelli che oggi si considerano numeri di Bernoulli. Non si considerano B_0 e B_1 ma si comincia dal successivo per cui gli indici usati nel programma, visibili sul lato destro, $B_1 B_3 B_5 \dots$ corrispondono ai nostri $B_2 B_4 B_6 \dots$. L'algoritmo usato evita il calcolo dei valori nulli. Utilizzando la nostra notazione può esprimersi come:

$$\frac{1}{2} \frac{2n-1}{2n+1} = B_2 \frac{2n}{2} + B_4 \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{4!} + \dots = \sum_{k=1}^n \frac{(2n)^{2k-1}}{(2k)!} B_{2k}$$

Tenendo conto che nell'ultimo termine della somma si ha

$$(2n)^{\overline{2n-1}} = (2n)!$$

si può isolare l'ultimo addendo ottenendo:

$$B_{2n} = \frac{1}{2} \frac{2n-1}{2n+1} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(2n)^{\overline{2k-1}}}{(2k)!} B_{2k}$$

da utilizzare per $n > 1$. Per $n=1$ invece abbiamo semplicemente

$$B_2 = \frac{1}{2} \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{6}$$

La formula nonostante le apparenze coincide con quella che abbiamo già dimostrato in 7.8:

$$B_n^- = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k^-$$

Infatti risulta

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(2n)^{\overline{2k-1}}}{(2k)!} B_{2k} = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{2n+1}{2k} B_{2k}$$

e anche:

$$\frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^1 \binom{2n+1}{k} B_k = -\frac{1}{2} \frac{2n-1}{2n+1} \quad (\text{con } B_0 = 1 \text{ e } B_1 = -\frac{1}{2})$$

Se si parte dalla forma esplicita vera per $m > 0$

$$\sum_{j=0}^m \binom{m+1}{j} B_j = 0$$

si ottiene

$$\binom{m+1}{0} B_0 + \binom{m+1}{1} B_1 + \sum_{j=2}^{m-1} \binom{m+1}{j} B_j + \binom{m+1}{m} B_m = 0$$

$$B_0 + (m+1) B_1 + \sum_{j=2}^{m-1} \binom{m+1}{j} B_j + (m+1) B_m = 0$$

da cui facilmente si arriva alla più generale

$$B_m = \frac{1}{2} \frac{m-1}{m+1} - \sum_{j=2}^{m-1} \frac{m^{j-1}}{j!} B_j$$

che calcola anche i valori nulli corrispondenti agli indici dispari per $m > 2$

10. La via analitica

Finora ho seguito la via matriciale, una via elementare che mi sono aperto senza poter sapere se qualcuno mi abbia o meno preceduto. Attraverso questa via è stato possibile dimostrare alcune proprietà di questi numeri. Attualmente invece mi pare si percorra soprattutto la via analitica, aperta dalla analisi matematica. Qui i numeri bernoulliani non sono definiti in relazione al problema che storicamente ce li ha fatti conoscere ma attraverso concetti più complessi e problematici come le serie infinite. Ora mi propongo sia di presentare questa via

più frequentata sia di collegarla alla mia via.

10.1 Funzione generatrice, variante negativa

Nella nota G scritta da Ada [3] viene presentata la formula che abbiamo visto e questa viene giustificata spiegando in che modo si possa ricavare da un particolare sviluppo in serie dove appaiono gli stessi numeri già incontrati da Bernoulli. E' questa la cosiddetta funzione generatrice per i numeri di Bernoulli nella variante con B_1 negativo:

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^- \frac{x^n}{n!}$$

L'uguaglianza è ristretta al caso $x < 2\pi$ (raggio di convergenza della serie). Questa uguaglianza è un notevole risultato dell'analisi matematica. E' lo sviluppo in serie di Maclaurin. Per questo sviluppo si devono calcolare i valori della funzione e delle derivate successive nel punto $x=0$ dove tutte queste funzioni non sono definite e quindi si devono calcolare i limiti per arrivare a determinare in questo modo i numeri di Bernoulli.

Ma cosa assicura che in questo modo lungo e laborioso usciranno sempre e solo gli stessi numeri incontrati da Bernoulli affrontando tutt'altro problema? Per dimostrare questa identità seguirò la strada indicata anche da Ada nelle sue note.

Si considera il notissimo sviluppo in serie di Maclaurin della funzione esponenziale:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

e si sostituisce nella funzione generatrice ottenendo:

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots} = \frac{1}{1 + \frac{x^1}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{5!} + \dots}$$

Quindi considerando lo sviluppo in serie:

$$\frac{1}{1 + \frac{x^1}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{5!} + \dots} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} B_k$$

da cui

$$1 = \left(\frac{x^0}{0!} B_0 + \frac{x^1}{1!} B_1 + \frac{x^2}{2!} B_2 + \frac{x^3}{3!} B_3 + \frac{x^4}{4!} B_4 + \dots \right) \left(\frac{x^0}{1!} + \frac{x^1}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{5!} + \dots \right)$$

e moltiplicando i polinomi infiniti:

$$\begin{aligned}
1 = & \\
&= (B_0 + \frac{x^1}{1!1!}B_1 + \frac{x^2}{2!1!}B_2 + \frac{x^3}{3!1!}B_3 + \frac{x^4}{4!1!}B_4 + \dots) + \\
&+ (\frac{x^1}{0!2!}B_0 + \frac{x^2}{1!2!}B_1 + \frac{x^3}{2!2!}B_2 + \frac{x^4}{3!2!}B_3 + \frac{x^5}{4!2!}B_4 + \dots) + \\
&+ (\frac{x^2}{0!3!}B_0 + \frac{x^3}{1!3!}B_1 + \frac{x^4}{2!3!}B_2 + \frac{x^5}{3!3!}B_3 + \frac{x^6}{4!3!}B_4 + \dots) + \\
&+ (\frac{x^3}{0!4!}B_0 + \frac{x^4}{1!4!}B_1 + \frac{x^5}{2!4!}B_2 + \frac{x^6}{3!4!}B_3 + \frac{x^7}{4!4!}B_4 + \dots) + \\
&+ (\frac{x^4}{0!5!}B_0 + \frac{x^5}{1!5!}B_1 + \frac{x^6}{2!5!}B_2 + \frac{x^7}{3!5!}B_3 + \frac{x^8}{4!5!}B_4 + \dots) + \\
&+ (\frac{x^5}{0!6!}B_0 + \frac{x^6}{1!6!}B_1 + \frac{x^7}{2!6!}B_2 + \frac{x^8}{3!6!}B_3 + \frac{x^9}{4!6!}B_4 + \dots) + \\
&+ \dots
\end{aligned}$$

Si nota che i monomi dello stesso grado si trovano sulla diagonale. Con la messa in evidenza delle potenze crescenti si ha:

$$\begin{aligned}
1 = & B_0 + \\
&+ (\frac{1}{0!2!}B_0 + \frac{1}{1!1!}B_1)x + \\
&+ (\frac{1}{0!3!}B_0 + \frac{1}{1!2!}B_1 + \frac{1}{2!1!}B_2)x^2 + \\
&+ (\frac{1}{0!4!}B_0 + \frac{1}{1!3!}B_1 + \frac{1}{2!2!}B_2 + \frac{1}{3!1!}B_3)x^3 + \\
&+ (\frac{1}{0!5!}B_0 + \frac{1}{1!4!}B_1 + \frac{1}{2!3!}B_2 + \frac{1}{3!2!}B_3 + \frac{1}{4!1!}B_4)x^4 + \\
&+ (\frac{1}{0!6!}B_0 + \frac{1}{1!5!}B_1 + \frac{1}{2!4!}B_2 + \frac{1}{3!3!}B_3 + \frac{1}{4!2!}B_4 + \frac{1}{5!1!}B_5)x^5 + \\
&+ \dots
\end{aligned}$$

Utilizzando i coefficienti binomiali e ricordando:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} 1 = & B_0 + \\ & + \frac{1}{2!} \left(\binom{2}{0} B_0 + \binom{2}{1} B_1 \right) x + \\ & + \frac{1}{3!} \left(\binom{3}{0} B_0 + \binom{3}{1} B_1 + \binom{3}{2} B_2 \right) x^2 + \\ & + \frac{1}{4!} \left(\binom{4}{0} B_0 + \binom{4}{1} B_1 + \binom{4}{2} B_2 + \binom{4}{3} B_3 \right) x^3 + \\ & + \frac{1}{5!} \left(\binom{5}{0} B_0 + \binom{5}{1} B_1 + \binom{5}{2} B_2 + \binom{5}{3} B_3 + \binom{5}{4} B_4 \right) x^4 + \\ & + \frac{1}{6!} \left(\binom{6}{0} B_0 + \binom{6}{1} B_1 + \binom{6}{2} B_2 + \binom{6}{3} B_3 + \binom{6}{4} B_4 + \binom{6}{5} B_5 \right) x^5 + \\ & + \dots \end{aligned}$$

Ora è evidente che, affinché questa uguaglianza sia possibile, non solo deve essere $B_0=1$ ma si devono annullare anche tutti i coefficienti degli infiniti monomi. Dunque per ogni intero $m>1$ deve essere:

$$\sum_{j=0}^m \binom{m+1}{j} B_j = 0$$

che è la legge che abbiamo già incontrato e che ci garantisce che anche con lo sviluppo in serie si ha la stessa sequenza numerica bernoulliana. Ricordiamo che qui si intendono i numeri di Bernoulli nella variante con $B_1=-1/2$.

10.2 Funzione generatrice, variante positiva

Sommando x ai due membri della prima uguaglianza, otteniamo la seconda, funzione generatrice della variante con $B_1=1/2$ dei numeri di Bernoulli

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} B_k^-$$

$$\frac{-x}{e^{-x} - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} B_k^+$$

infatti al primo membro si ha:

$$\frac{x}{e^x - 1} + x = \frac{x + x(e^x - 1)}{e^x - 1} = \frac{xe^x}{e^x - 1} = \frac{x}{1 - e^{-x}} = \frac{-x}{e^{-x} - 1}$$

mentre al secondo sommando gli unici due monomi di primo grado, si ha il cambio di segno di B_1 .

Si può notare che la seconda funzione generatrice si ottiene dalla prima anche sostituendo x con il suo opposto. Ciò però dovrebbe cambiare segno a tutti i monomi di grado dispari, ma ciò invece non risulta. Come è possibile? E' possibile in quanto abbiamo già dimostrato, e ora è confermato, che tutti i numeri con indice dispari superiore ad uno valgono zero e dunque il cambio di segno non ne muta il valore.

11. Altre relazioni con le matrici considerate

Mostriamo qui argomenti, anche non completamente sviluppati, che lasciano intravedere l'utilità dell'approccio matriciale utilizzato in questo saggio.

11.1 Relazione di A_m con i polinomi di Bernoulli

Riprendiamo in considerazione A_m così definita:

$$a_{j,k} = \begin{cases} 0 & \text{se } k > j \\ \binom{j}{k-1} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

se invece di moltiplicare la matrice inversa per il vettore di potenze di n , come già visto, moltiplichiamo per il vettore delle sue derivate prime otteniamo:

$$\begin{pmatrix} B_0(n) \\ B_1(n) \\ B_2(n) \\ \dots \\ B_{m-1}(n) \end{pmatrix} = A_m^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2n \\ 3n^2 \\ \dots \\ mn^{m-1} \end{pmatrix}$$

Dove $B_i(n)$ è l' i -esimo polinomio di Bernoulli

Esempio per $m=11$:

$$\begin{pmatrix} B_0(n) \\ B_1(n) \\ B_2(n) \\ B_3(n) \\ B_4(n) \\ B_5(n) \\ B_6(n) \\ B_7(n) \\ B_8(n) \\ B_9(n) \\ B_{10}(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{30} & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{12} & 0 & \frac{5}{12} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{42} & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & 0 & -\frac{7}{24} & 0 & \frac{7}{12} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{30} & 0 & \frac{2}{9} & 0 & -\frac{7}{15} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{20} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{7}{10} & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{5}{66} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & \frac{5}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{11} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 2n \\ 3n^2 \\ 4n^3 \\ 5n^4 \\ 6n^5 \\ 7n^6 \\ 8n^7 \\ 9n^8 \\ 10n^9 \\ 11n^{10} \end{pmatrix}$$

$$B_0(n) = 1$$

$$B_1(n) = -\frac{1}{2} + n$$

$$B_2(n) = \frac{1}{6} - n + n^2$$

$$B_3(n) = \frac{1}{2}n - \frac{3}{2}n^2 + n^3$$

$$B_4(n) = -\frac{1}{30} + n^2 - 2n^3 + n^4$$

$$B_5(n) = -\frac{1}{6}n + \frac{5}{3}n^3 - \frac{5}{2}n^4 + n^5$$

$$B_6(n) = \frac{1}{42} - \frac{1}{2}n^2 + \frac{5}{2}n^4 - 3n^5 + n^6$$

$$B_7(n) = \frac{1}{6}n - \frac{7}{6}n^3 + \frac{7}{2}n^5 - \frac{7}{2}n^6 + n^7$$

$$B_8(n) = -\frac{1}{30} + \frac{2}{3}n^2 - \frac{28}{15}n^3 + 4n^5 - 4n^7 + n^8$$

$$B_9(n) = -\frac{3}{10}n + 2n^3 - \frac{21}{5}n^5 + 6n^7 - \frac{9}{2}n^8 + n^9$$

$$B_{10}(n) = \frac{5}{66} - \frac{3}{2}n^2 + 5n^4 - 7n^6 + \frac{15}{2}n^8 - 5n^9 + n^{10}$$

Notare che questi polinomi sono le derivate prime di quelli per le somme di potenze di interi successivi. La relazione tra le matrici è la seguente:

$$M_n = \overline{G}_n * N_n \quad \overline{G}_n = M_n * N_n^{-1}$$

dove M_n è la matrice dei coefficienti dei polinomi di Bernoulli N_n è una matrice con tutti elementi nulli tranne la diagonale principale dove compaiono in sequenza i numeri naturali. La sua inversa invece ha i reciproci in diagonale. Esempio:

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

O anche per quanto dimostrato in 8 :

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1B_0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}2B_1^- & \frac{1}{2}1B_0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3}3B_2 & \frac{1}{3}3B_1^- & \frac{1}{3}1B_0 & 0 \\ \frac{1}{4}4B_3 & \frac{1}{4}6B_2 & \frac{1}{4}4B_1^- & \frac{1}{4}1B_0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1B_0 & 0 & 0 & 0 \\ 1B_1^- & 1B_0 & 0 & 0 \\ 1B_2 & 2B_1^- & 1B_0 & 0 \\ 1B_3 & 3B_2 & 3B_1^- & 1B_0 \end{pmatrix}$$

dove:

$$N_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad N_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Da quanto precede si può anche osservare che risulta anche

$$N_m^{-1} * Z_m * N_m = T_m$$

Per quanto riguarda la matrice inversa si ricava facilmente:

$$M_n^{-1} = N_n^{-1} A_n$$

che perciò si ricava facilmente dalla A_n dividendo tutti gli elementi delle varie righe per gli interi successivi. Si ricava quindi facilmente (come fatto in 7.5) anche:

$$B_n^+ = |A'_n|$$

dove A'_n è una matrice di n righe e n colonne facilmente ricavabile dal triangolo di Tartaglia che può essere definita come segue:

$$a'_{i,k} = \begin{cases} 0 & \text{se } k > 1 + i \\ \binom{i+1}{k-1} / (i+1) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

esempio:

$$B_6^+ = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & 1 & \frac{5}{2} & \frac{10}{3} & \frac{5}{2} & 1 \\ \frac{1}{7} & 1 & 3 & 5 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{42}$$

Da notare che se si moltiplicano le righe per il reciproco del loro primo elemento il determinante viene moltiplicato per $7!$ per cui si ritorna alla precedente formula:

$$B_6^+ = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 0 \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 \\ 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 \end{vmatrix}}{7!} = \frac{120}{5040} = \frac{1}{42}$$

.

11.2 Fattoriali crescenti, decrescenti e numeri di Stirling

Si chiamano fattoriali crescenti di x i seguenti prodotti

$$x^{\bar{1}} = x$$

$$x^{\bar{2}} = x(x+1) = x^2 + x$$

$$x^{\bar{3}} = x(x+1)(x+2) = x^3 + 3x^2 + 2x$$

$$x^{\bar{4}} = x(x+1)(x+2)(x+3) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x$$

e così via

Si chiamano fattoriali decrescenti di x i seguenti prodotti

$$x^{\underline{1}} = x$$

$$x^{\underline{2}} = x(x-1) = x^2 - x$$

$$x^{\underline{3}} = x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x$$

$$x^{\underline{4}} = x(x-1)(x-2)(x-3) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$$

e così via

I coefficienti dei polinomi espansi sono i numeri di Stirling di prima specie e i primi casi esaminati possono anche essere espressi come:

$$F_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 6 & 11 & 6 & 1 \end{pmatrix} \quad \bar{F}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ -6 & 11 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_4 * \begin{pmatrix} x \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{\bar{1}} \\ x^{\bar{2}} \\ x^{\bar{3}} \\ x^{\bar{4}} \end{pmatrix} \quad \bar{F}_4 * \begin{pmatrix} x \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{\underline{1}} \\ x^{\underline{2}} \\ x^{\underline{3}} \\ x^{\underline{4}} \end{pmatrix}$$

Sappiamo che le due matrici alternate avranno inverse alternate. Queste corrispondono ai numeri di Stirling di seconda specie:

$$F_4^{-1} = \bar{S}_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 7 & -6 & 1 \end{pmatrix} \quad \bar{F}_4^{-1} = S_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

che nella forma positiva corrispondono anche al numero di partizioni di un insieme in un certo numero di classi.

Risulta:

$$\bar{S}_n * N_n * F_n = A_n \quad e \text{ simmetricamente : } S_n * N_n * \bar{F}_n = \bar{A}_n$$

e anche:

$$S_n * N_n^{-1} * \bar{F}_n * \bar{S}_n * N_n * F_n = T_n$$

11.3 Altre relazioni notevoli

Per ogni intero positivo n vale anche:

$$\begin{aligned} U_n &= \text{elemento neutro} & ; & \quad \bar{U}_n = U_n \\ T_n * \bar{T}_n &= U_n & : & \quad Z_n * \bar{Z}_n = U_n \\ A_n * \bar{G}_n &= U_n & \quad \bar{A}_n * G_n &= U_n \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll}
A_n * G_n = Z_n & \overline{A_n} * \overline{G_n} = \overline{Z_n} \\
G_n * A_n = T_n & \overline{G_n} * \overline{A_n} = \overline{T_n} \\
A_n * \overline{T_n} = \overline{A_n} & \overline{A_n} * T_n = A_n \\
T_n * \overline{G_n} = G_n & \overline{T_n} * G_n = \overline{G_n} \\
G_n * \overline{Z_n} = \overline{G_n} & \overline{G_n} * Z_n = G_n \\
Z_n * \overline{A_n} = A_n & \overline{Z_n} * A_n = \overline{A_n}
\end{array}$$

12. Bibliografia

1. Giorgio Pietrocola, [*Esplorando un antico sentiero: teoremi sulla somma di potenze di interi successivi*](#), Maecla, 2008.
2. Frank J. Swetz and Victor J. [Katz Johann Mathematical treasures: Faulhaber's Accademiae Algebrae](#), MMA
3. Luigi Manabrea, con traduzione e note di Ada Lovelace, "[Sketch the analytical engine invented by Charles Babbage](#)", 1842, Ginevra