Formula detta di Faulhaber e matrici “Tartaglia(te)”

Sommario
Si delineano le principali tappe della ricerca dei polinomi per il calcolo delle somme di potenze di interi successivi, con particolare attenzione al momento in cui si introdussero nel panorama matematico i numeri di Bernoulli. Viene delineata anche l’evoluzione di questi ultimi e le implicazioni relative nella formula di Faulhaber. Quest’ultima viene messa in relazione con la formula usata da Ada Lovelace per il suo storico primo programma. Infine si presentano novità nel problema della determinazione dei polinomi che potrebbero insidiare l’egemonia della formula dominante.

Il problema delle somme di potenze di interi successivi, poteva considerarsi più che millenario quando furono pubblicati i primi dieci polinomi insieme ad una formula, poi diventata famosa, per generarne altri.

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n i^0 \\ \sum_{i=1}^n i^1 \\ \sum_{i=1}^n i^2 \\ \sum_{i=1}^n i^3 \\ \sum_{i=1}^n i^4 \\ \sum_{i=1}^n i^5 \\ \sum_{i=1}^n i^6 \\ \sum_{i=1}^n i^7 \\ \sum_{i=1}^n i^8 \\ \sum_{i=1}^n i^9 \\ \sum_{i=1}^n i^{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{30} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{12} & 0 & \frac{5}{12} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{42} & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & 0 & -\frac{7}{24} & 0 & \frac{7}{12} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{30} & 0 & \frac{2}{9} & 0 & -\frac{7}{15} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{20} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{7}{10} & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{5}{66} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{11} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \\ n^5 \\ n^6 \\ n^7 \\ n^8 \\ n^9 \\ n^{10} \\ n^{11} \end{pmatrix}$$

Presentati con una notazione moderna utilizzando, per motivi che saranno più chiari in seguito, il prodotto righe per colonne tra matrici, corretto un coefficiente errato nel testo classico, tranne il primo caso dell’esponente zero, questi sono i polinomi che furono pubblicati nel libro Ars Conjectandi [1] di Jacob (o James) Bernoulli nel 1713 nella parte seconda, a pagina 97, pochi anni dopo la morte dell’autore. Il libro, come tanti altri classici, è digitalizzato in rete da Internet Archive e quindi consultabile immediatamente da chiunque.

I polinomi in sé non erano un'assoluta novità, perché all'epoca si era già andati oltre in questa particolare esplorazione.
Già i pitagorici conoscevano bene Il caso delle somme con esponente 1 che dà i numeri triangolari:

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

Il caso successivo è la somma di quadrati degli interi che si trova dimostrato in Sfere [2] di Archimede (287- 212 a.C.) alla proposizione decima:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1+2^2+..+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

Il caso della somma di cubi poi è il bel teorema di Nicomaco di Gerasa (60-120 circa) che dimostra che il risultato è il quadrato del binomio pitagorico cioè della corrispondente somma di interi con esponente unitario:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1+2^3+\ldots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$$

Nei secoli, in vari periodi è continuata la ricerca di questi polinomi al crescere del grado dell'esponente. Diversi matematici [3] tra cui citiamo Abu Ali al-Hasan (965-1039), Jhoann Faulhaber (1580-1635),Pierre de Fermat (1601-1665), Blaise Pascal (1623-1662)[1], hanno dato grossi contributi sia trovando polinomi in casi successivi sia indicando vari metodi per estendere questa ricerca. La novità della pubblicazione quindi non era tanto nei polinomi mostrati quanto nella formula generale che cominciava così:

$$\sum_{k=1}^{n} k^m = \frac{1}{m+1}n^{m+1} + \frac{1}{2}n^m + \ldots$$

Fin qui, per i due monomi di maggior grado, nulla di nuovo anzi la conferma di quanto si era potuto osservare. Il grado dei polinomi che

1 https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/sums-of-powers-of-positive-integers-blaise-pascal-1623-1662-france

esprimono queste somme cresce con regolarità mantenendosi di una unità superiore al grado delle potenze sommate. Il coefficiente di grado massimo è il reciproco dell'esponente del suo monomio mentre il coefficiente avente lo stesso grado delle potenze sommate, è costante. Ma erano gli altri coefficienti che potete vedete espressi nella matrice triangolare, molto meno prevedibili, il vero problema. Ecco dunque come continua la formula rivelata da Bernoulli oggi conosciuta come Formula di Faulhaber:

$$\sum_{k=1}^{n} k^m = \frac{1}{m+1} n^{m+1} + \frac{1}{2} n^m + \sum_{k=2}^{n} \frac{m^{\underline{k-1}}}{k!} B_k n^{m-k+1}$$

"originale" formula di Faulhaber

Qui l'esponente sottolineato indica il fattoriale discendente cioè *m(m-1)(m-2)*... con tanti fattori quanti indicati dal valore sottolineato, mentre B_k si riferisce a particolari numeri, non più prevedibili dei coefficienti che determinano, introdotti nell'occasione che poi furono chiamati numeri di Bernoulli. Questi sono leggibili anche nella prima colonna della matrice dei coefficienti bernoulliani sopra riportata.

Ecco i primi degli infiniti valori:

$B_0 = 1 \quad B_1 = \pm\frac{1}{2} \quad B_2 = \frac{1}{6} \quad B_3 = 0 \quad B_4 = -\frac{1}{30} \quad B_5 = 0 \quad B_6 = \frac{1}{42} \quad B_7 = 0 \quad B_8 = -\frac{1}{30} \quad B_9 = 0 \quad B_{10} = \frac{5}{66}$

I primi due numeri furono aggiunti e considerati tali solo molto più tardi. Ben presto questi numeri acquisiranno una notevole autonomia che li porterà, come vedremo, perfino a far dimenticare quella che storicamente è la loro formula madre. Questi numeri compariranno infatti in contesti matematici assai diversi come nello sviluppo di funzioni in serie infinite che verranno utilizzate sia per la loro definizione sia per dimostrare[2] proprio quella stessa formula, legata alla loro apparizione, che prima non si era saputa dimostrare. Per evidenziare questo allontanamento dall'origine mi sembra significativo questo episodio del 1842. Ada Lovelace (nata Byron) (1815-1852) scrisse il primo programma della storia per l'elaboratore progettato da Charles Babbage (1791-1871). La macchina poi non fu realizzata e solo recentemente è stata in parte ricostruita per il museo della scienza di Londra. Il programma avrebbe dovuto collaudare la macchina calcolando proprio i numeri di Bernoulli. Ada, allora ventisettenne, era fornita di una non comune cultura matematica che si era formata studiando con i migliori matematici londinesi del suo tempo come Mary Sommerville (1780-1872) ed Augustus De Morgan (1806-1871) ed era da loro molto stimata. Quando

2 Una dimostrazione analitica della formula di Faulhaber è disponibile qui: http://planetmath.org/sites/default/files/texpdf/41499.pdf

collaborò con Babbage, traducendo e commentando un articolo sulla futura macchina, poté giovarsi di un ambiente matematico culturalmente ricco e scelse, tra altre disponibili all'epoca, una formula per il calcolo dei numeri di Bernoulli da utilizzare in quel suo primo programma. Nella sua famosa nota G, consultabile in rete in lingua inglese [6], scrisse dei motivi di questa scelta spiegando la strada attraverso la quale tale formula poteva essere ricavata per via analitica. La spiegazione presuppone conoscenze di analisi matematica ed è tutt'altro che immediata. Per giustificare quella formula, esiste però un'altra possibilità molto più semplice che fu completamente ignorata allora come, a quanto sembra[3], anche oggi. Servono infatti solo pochi passaggi di algebra elementare per constatare che la formula che fu scelta in quella speciale circostanza si ottiene facilmente come caso particolare della formula di Faulhaber [10]. Infatti sostituendo *n* con *1* si ottiene[4]:

$$0 = -\frac{1}{2}\frac{m-1}{m+1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{m^{k-1}}{k!} B_k$$

"originale" formula di Ada

Mentre i numeri di Bernoulli dunque sembrano essersi svincolati dal problema che li ha lanciati nel mondo matematico, il viceversa non si è ancora realizzato anche se, come cercherò di mostrare, non mancano motivi perché ciò possa accadere in futuro. Dopo quella pubblicazione del 1713, infatti, forse anche per il successo dei numeri introdotti che in breve tempo hanno eclissato per importanza lo stesso problema madre, quest'ultimo invece, ancora oggi, sembra non poter più fare a meno di quei compagni acquisiti in età già avanzata.

Ecco come oggi, usando tutti i numeri di Bernoulli nella variante con[5] $B_1=½$, si presenta la formula di Faulhaber:

$$\sum_{k=1}^{n} k^m = \frac{1}{(m+1)} \sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} B_k n^{m+1-k}$$

attuale formula di Faulhaber

Naturalmente considerando il caso particolare *n=1* si trova la forma attuale equivalente a quella scelta da Ada che poi è la formula ricorsiva normalmente usata per il calcolo dei numeri di Bernoulli e comunemente

3 come si può notare, per esempio, anche in questo testo a noi contemporaneo https://tjmisa.com/papers/2013-10_AdaLovelace-Stevens.pdf

4 Per un confronto effettivo della forma qui presentata con la versione originale, presente in rete, si deve considerare che i suoi B1, B3, B5.. corrispondono ai nostri B2, B4, B6, che non compare il segno di sommatoria e che non ci sono gli addendi nulli per cui il suo *2n* corrisponde al nostro *m* .

5i OEIS secondi numeri di Bernoulli, variante "originale" (A164555/A027642) ottenuta per via analitica[6].

$$\sum_{j=0}^{m} \binom{m+1}{j} B_j = \begin{cases} 1 & \text{se } m = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

attuale formula di Ada

La sostituzione, tranne per m=0, fa cambiare segno al monomio di grado *m* per cui in questa formula si deve intendere l'altra variante[7], quella con $B_1=-½$. Chi, come per molto tempo è accaduto, considera soltanto quest'ultima sequenza deve complicare. Ha due strade, entrambe molto praticate, a disposizione per adattare la moderna formula di Faulhaber che abbiamo presentato. La prima è aggiungere nella sommatoria un fattore $(-1)^j$ che in realtà cambia segno solo a B_1 dato che i successivi numeri bernoulliani con indice dispari, come si può dimostrare, valgono tutti zero. La seconda è limitare la sommatoria a *n-1* addendi. Il che equivale a sottrarre n^m ai due membri e conseguentemente cambiare segno al monomio di grado *m* che ha appunto coefficiente ½. Per questo la matrice dei coefficienti dei polinomi, relativi a questo caso ridotto, è identica a quella presentata all'inizio tranne per il cambio di segno del penultimo termine non nullo di ogni riga. Questi unici elementi mutati della nuova matrice sono posizionati tutti nella diagonale immediatamente sotto la principale. Le due matrici considerate, assai simili tra loro, hanno entrambe una proprietà sorprendente [7]: le loro inverse diventano ben riconoscibili e facilmente costruibili. Scomparse le frazioni, si riconosce infatti il triangolo di Tartaglia, a segni alternati o meno, anche se privato dell'ultimo elemento di ogni riga. Ciò permette di trovare i coefficienti dei polinomi senza ricorrere ai numeri di Bernoulli. Questi a loro volta potrebbero essere agevolmente definiti partendo da queste matrici "Tartaglia(te)" e calcolati come loro minori [11]. Per determinare i polinomi per somme di *n* potenze di interi successivi da *0* a *n-1* si può utilizzare quindi un'equazione del tipo[8]:

$$\vec{S} = A^{-1}\vec{V}$$

dove *A* è la matrice quadrata con il triangolo di Tartaglia incompleto. Per esempio nel caso particolare di sei polinomi si ha:

6 Si tenga presente che la sommatoria da 0
7 OEIS i primi numeri di Bernoulli (A027641/A027642)
8 Si assegna valore 1 alla forma indeterminata 0^0 che si presenta nel caso m=0.

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n-1} k^0 \\ \sum_{k=0}^{n-1} k^1 \\ \sum_{k=0}^{n-1} k^2 \\ \sum_{k=0}^{n-1} k^3 \\ \sum_{k=0}^{n-1} k^4 \\ \sum_{k=0}^{n-1} k^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 0 \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \\ n^5 \\ n^6 \end{pmatrix}$$

Per dimostrare questa equazione[9] basta dimostrare la sua inversa in cui si isola il vettore delle potenze. E' notevole il fatto che nella dimostrazione si incontra una identità già utilizzata da Pascal nel 1654 [9] proprio per risolvere ricorsivamente il problema in questione.
La superiorità di questo metodo per determinare i coefficienti polinomiali mi sembra evidenziata dal fatto che si può estendere facilmente a somme di n interi consecutivi inizianti, non forzatamente da *0* o da *1*, ma da un qualsiasi intero relativo. Infatti il vettore delle sommatorie può pensarsi come la sommatoria di n vettori di Vandermonde. Questi hanno le componenti uguali alle potenze aventi una stessa base ed esponenti *0,1,2...m-1*. La matrice *T*, di m righe e m colonne, contenente il triangolo di Tartaglia completo, se moltiplicata per un vettore di Vandermonde ne aumenta la base di una unità, come si può constatare semplicemente sviluppando progressivamente le potenze di *x+1* e osservando che:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x+1 \\ (x+1)^2 \\ (x+1)^3 \\ (x+1)^4 \\ (x+1)^5 \end{pmatrix}$$

Per questo se moltiplichiamo la matrice *T* per il vettore delle sommatorie e applichiamo la proprietà distributiva, tutte le basi dei vettori di Vandermonde con base gli interi successivi aumentano di un'unità con effetto complessivo di traslazione. Dunque se moltiplichiamo, a sinistra, *h* volte per la matrice di Tartaglia i due membri dell'equazione risolvente il caso più semplice, otteniamo la formula più generale:

9 Teorema 1B in [8]

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=h}^{h+n-1} i^0 \\ \sum_{i=h}^{h+n-1} i^1 \\ \dots \\ \sum_{i=h}^{h+n-1} i^{m-1} \end{pmatrix} = T_m^h A_m^{-1} \begin{pmatrix} n \\ n^2 \\ \dots \\ n^m \end{pmatrix}$$

dove gli indici indicano il numero di righe e di colonne delle matrici.
Quindi i polinomi presentati all'inizio corrispondono al caso *m=11* e *h=1* mentre l'altro caso presentato, quello con le sommatorie da *0* a *n-1*, corrisponde al caso *m=6* e *h=0.*
Come la matrice *T* incrementa la base del vettore di Vandermonde così la sua inversa lo decrementa. Dunque la formula data funziona anche con valori negativi.
Per esempio con *m*=6, h=-9, calcolando[10] $T^{-9}A^{-1}$ si ottiene:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=-9}^{n-10} i^0 \\ \sum_{i=-9}^{n-10} i^1 \\ \sum_{i=-9}^{n-10} i^2 \\ \sum_{i=-9}^{n-10} i^3 \\ \sum_{i=-9}^{n-10} i^4 \\ \sum_{i=-9}^{n-10} i^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{19}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{541}{6} & -\frac{19}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -855 & \frac{541}{4} & -\frac{19}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{242999}{30} & -1710 & \frac{541}{3} & -\frac{19}{2} & \frac{1}{5} & 0 \\ -76665 & \frac{242999}{12} & -2850 & \frac{2705}{12} & -\frac{19}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \\ n^5 \\ n^6 \end{pmatrix}$$

Si potrebbe dimostrare come le matrici TA^{-1} , A^{-1} presentate per prime formino una coppia in relazione tale che si possono ottenere l'una dall'altra moltiplicando ogni elemento a_{ij} per $(-1)^{i+j}$. Analogamente vi sono infinite altre coppie "coniugate" del tipo $T^{-h}TA^{-1}$, $T^{h}A^{-1}$
Quindi il caso precedente *h*=-9 fa coppia con il caso *h=10* per cui per avere le somme delle potenze di *n* interi successivi partendo da *10* basta utilizzare la matrice precedente cambiando segno alternativamente, ovvero dove la somma tra indice di riga e di colonna è dispari.

10 Per i valori dati è stato usato un normale foglio di calcolo. Per ottenere i numeratori delle frazioni, in questo e negli altri casi, gli elementi delle righe vanno moltiplicati per la sequenza dei comuni denominatori A064538 : 1,2,6,4,30,12,42,24,90,20, 66,24...

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=10}^{n+9} i^0 \\ \sum_{i=10}^{n+9} i^1 \\ \sum_{i=10}^{n+9} i^2 \\ \sum_{i=10}^{n+9} i^3 \\ \sum_{i=10}^{n+9} i^4 \\ \sum_{i=10}^{n+9} i^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{19}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{541}{6} & \frac{19}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 855 & \frac{541}{4} & \frac{19}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{242999}{30} & 1710 & \frac{541}{3} & \frac{19}{2} & \frac{1}{5} & 0 \\ 76665 & \frac{242999}{12} & 2850 & \frac{2705}{12} & \frac{19}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \\ n^5 \\ n^6 \end{pmatrix}$$

Per ora ho fatto del mio meglio per spiegare il possibile senza entrare troppo in dettagli, cercando di mostrare le idee semplici e potenti alla base dei risultati mostrati. Ora invece, come fece Jacob in quella pag.97, per finire in bellezza lascio alla curiosità dei lettori, senza spiegazioni, un caso particolare di un'ulteriore generalizzazione di quanto già mostrato. In questa, quasi a compensare un'asimmetria svolge un ruolo anche un'altra matrice estratta dal triangolo di Tartaglia, questa volta però, invece di essere tagliata alla fine, è tagliata (o "tartagliata") all'inizio.

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=3}^{n+4} k^0 \\ \sum_{k=3}^{n+4} k^1 \\ \sum_{k=3}^{n+4} k^2 \\ \sum_{k=3}^{n+4} k^3 \end{pmatrix} = (n+2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}^{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ n \\ n^2 \\ n^3 \end{pmatrix}$$

Considerazioni finali.

L'autore, un ex insegnante da anni in pensione, si diletta nella ricerca matematica. Durante i suoi studi ha scoperto e dimostrato il teoremi presentato e anche altri. Attualmente, nonostante le sue lunghe ricerche, non sa se questi siano conosciuti o meno[11]. Sicuramente però non sono stati divulgati come invece, per la lunga storia del problema che risolvono, per le proprietà del famoso triangolo che evidenziano e anche per la loro bellezza, a suo avviso, meritano.

Bibliografia

1. Jacob Bernoulli, *"Summae potestatum" in "Artis Conjectandi*", Internet Archive (p.97),1713
2. Attilio Frajese (a cura di), Opere di Archimede, UTET, 1974.

11 In bibliografia [12] [13] [14] alcune pubblicazioni disponibili in rete che fanno uso di matrici in problemi connessi.

3. Sum of power of positive integer, Mathematical association of America (MMA), in https://www.maa.org
4. Frank J. Swetz and Victor J. Katz Johann ,Mathematical treasures: Faulhaber's Accademiae Algebrae, MMA
5. Donald Knuth, Johann Faulhaber and sums of powers, Internet Archive, 1992
6. Luigi Manabrea, Ada Lovelace, *Sketch the analitycal engine invented by Charles Babbage*, 1842,Ginevra, www.fourmilab.ch
7. Giorgio Pietrocola, *Esplorando un antico sentiero: teoremi sulla somma di potenze di interi successivi*, Maecla 2008
8. Giorgio Pietrocola, *Internet e l'algoritmo di Ada Byron, Contessa di Lovelace e incantatrice di numeri*, Maecla, 2017
9. Mcmillan Sondow, Proof of power sum and binomial coefficient congruences via Pascal's identity, Internet Archive, 2010
10. Giorgio Pietrocola , Dialogo con la formula che anticipò di un secolo l'era informatica, in www.pietrocola.eu
11. Giorgio Pietrocola, Ricerca in corso sui numeri di Bernoulli…, in www.pietrocola.eu
12. Derby Nigel (2015) A search for sums of powers, *The Mathematical Gazzette*
13. L.E.Coen, Sums of powers and bernoulli numbers, Illinois, 1995
14. Gottfried Helms , Identities involving binomial-coefficients, Bernoulli- and Stirlingnumbers ,Univ Kessel 2006