Polinomi per somme di potenze di interi successivi ovunque inizianti

di Giorgio Pietrocola
giorgio.pietrocola@gmail.com
4 Dicembre 2017

Sommario
Viene presentato un teorema scoperto (o riscoperto) dall'autore, per risolvere e generalizzare, con uso di matrici, un problema classico tradizionalmente risolto con la formula di Faulhaber

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{30} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{30} & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Fig.1 Un prodotto sorprendente

Nella fig.1 i lettori avranno sicuramente riconosciuto il triangolo di Tartaglia nell'inaspettato risultato del prodotto righe per colonne mostrato. Meno note invece potrebbero risultare le altre due matrici, piuttosto simili tra loro, ma non prive certo d'importanza. Sono infatti i coefficienti dei polinomi per il calcolo delle somme di potenze di interi successivi. Un problema di antica storia [3]. Cominciò con i numeri triangolari di Pitagora (575 circa-495a.C.) e della sua Scuola calcolabili con il polinomio $\frac{1}{2} n^2+\frac{1}{2} n$ i cui coefficienti si leggono nella seconda riga della nostra prima matrice. Proseguì nelle proposizione decima delle Sfere di Archimede (287- 212 a.C.) [2], che indica il polinomio di terzo grado per il calcolo dei quadrati degli interi successivi i cui coefficienti sono nella nostra terza riga. Nella quarta ci troviamo invece i coefficienti del polinomio di quarto grado indicato dal bel teorema di Nicomaco sulle somme dei cubi, che ci mostra che il polinomio calcolante questa volta è il quadrato di quello pitagorico già mostrato. Tralascio molta storia, pure importante, sviluppatasi nei secoli per arrivare a Faulhaber (1580-1635) che trovò, per le somme di potenze con esponente dispari , polinomi fino al diciassettesimo grado [5] ,espressi in funzione del binomio pitagorico. Solo un cenno sul notevole contributo di Pascal (1623-1662) che attraverso un'identità [7] data da una sommatoria i cui addendi, tranne il primo e l'ultimo si semplificano a due a due con effetto "telescopico", mostrò un modo ricorsivo per ottenere i vari polinomi al crescere degli esponenti. Questa rapida panoramica per arrivare finalmente, a Jacob Bernoulli (1654-1705) e al suo Ars Conjectandi pubblicato postumo nel 1713. Nel libro, consultabile in rete, a pag 97, sono riportati i polinomi di cui stiamo parlando che è possibile vedere in fig.2 sistemati ed espressi come prodotto tra matrici (non ancora conosciute all'epoca).

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} i^0 \\ \sum_{i=1}^{n} i^1 \\ \sum_{i=1}^{n} i^2 \\ \sum_{i=1}^{n} i^3 \\ \sum_{i=1}^{n} i^4 \\ \sum_{i=1}^{n} i^5 \\ \sum_{i=1}^{n} i^6 \\ \sum_{i=1}^{n} i^7 \\ \sum_{i=1}^{n} i^8 \\ \sum_{i=1}^{n} i^9 \\ \sum_{i=1}^{n} i^{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{30} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{12} & 0 & \frac{5}{12} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{42} & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & 0 & -\frac{7}{24} & 0 & \frac{7}{12} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{30} & 0 & \frac{2}{9} & 0 & -\frac{7}{15} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{20} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{7}{10} & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{5}{66} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{11} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \\ n^5 \\ n^6 \\ n^7 \\ n^8 \\ n^9 \\ n^{10} \\ n^{11} \end{pmatrix}$$

Fig.2 I polinomi per la somma di potenze di interi successivi da *1* a *n*

Da notare che il minore costituito dalle prime sei righe e dalle prime sei colonne della matrice triangolare 11x11 è la nostra matrice 6x6 di fig.1. Oltre ai primi polinomi per il calcolo della somma di potenze di interi successivi Bernoulli fornisce anche, senza poterla dimostrare, una formula per la determinazione del polinomio per qualunque esponente *m* intero positivo. La formula inizia con $1/(m+1)\ n^{m+1}+1/2\ n^m$ +... e fino a qui tutto regolare e facilmente prevedibile. Ciò si vede anche nella matrice di fig.2 in cui la diagonale principale ha i coefficienti di grado massimo uguali al reciproco del grado del polinomio risultante dal prodotto righe per colonne. La diagonale immediatamente sottostante mostra ½ costante cioè il coefficiente del monomio il cui grado eguaglia gli esponenti degli

interi successivi sommati.
La novità in realtà era nel seguito perchè i rimanenti coefficienti, molto più irregolari, venivano espressi in funzione di speciali numeri presentati per la prima volta in quell'occasione . Questi numeri, in seguito chiamati numeri di Bernoulli, avranno un grande successo diventando protagonisti anche in analisi matematica.
Ecco i primi numeri della sequenza infinita :

$$B_0 = 1 \quad B_1 = \pm\frac{1}{2} \quad B_2 = \frac{1}{6} \quad B_3 = 0 \quad B_4 = -\frac{1}{30} \quad B_5 = 0 \quad B_6 = \frac{1}{42} \quad B_7 = 0 \quad B_8 = -\frac{1}{30} \quad B_9 = 0 \quad B_{10} = \frac{5}{66}$$

Fig.3 I primi numeri di Bernoulli nelle sue due varianti quasi identiche.

Notare che questi numeri, nelle distinte varianti[1], corrispondono alle prime colonne di due delle matrici presentate in fig.1.Per molto tempo, come aveva fatto anche Bernoulli, non vennero considerati i primi due numeri dell'elenco. Poi, come molti fanno ancora oggi, visto che la variante con B_1=-½ compariva nello sviluppo in serie infinita di *x/(e^x-1),* si prese questa come mezzo per definire la sequenza e per dimostrare finalmente la formula che li aveva visti nascere. Questa scelta però mal si adattava a esprimere sinteticamente, utilizzando anche i primi numeri, la formula rivelata da Bernoulli detta oggi impropriamente formula di Faulhaber. Infatti per far tornare i conti sarebbe stato comodo porre B_1=½. Per ovviare era necessario moltiplicare per -1 tutti i numeri con indice dispari presenti in sommatoria. Ma dato che, come dimostrabile, tranne il primo, tali numeri valgono tutti zero, tanta fatica deve essere sembrata sproporzionata al risultato. Una soluzione alternativa adottata, tuttora piuttosto diffusa in letteratura, fu quella di considerare le somme non più da *1* a *n* come naturale ma da *0* a *n-1.* In questo modo si eliminava l'ultimo addendo della sommatoria n^m e si aggiungeva 0^m, quasi sempre zero tranne nel primo caso quando genera la forma indeterminata 0^0, che converrà porre uguale a uno. Togliendo dunque n^m ai polinomi della formula di Faulhaber che hanno, come abbiamo visto, il monomio $1/2n^m$, si sommano i monomi simili e si ottiene un cambio di segno nel coefficiente. Ecco spiegata dunque anche la seconda matrice di fig.1 che dà i coefficienti dei polinomi per somme da *0* a *n-1*

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n-1} k^0 \\ \sum_{k=0}^{n-1} k^1 \\ \sum_{k=0}^{n-1} k^2 \\ \sum_{k=0}^{n-1} k^3 \\ \sum_{k=0}^{n-1} k^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{30} & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \\ n^5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} k^0 \\ \sum_{k=1}^{n} k^1 \\ \sum_{k=1}^{n} k^2 \\ \sum_{k=1}^{n} k^3 \\ \sum_{k=1}^{n} k^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{30} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \\ n^5 \end{pmatrix}$$

1 OEIS i primi numeri di Bernoulli (A027641/A027642)
OEIS secondi numeri di Bernoulli, variante "originale" (A164555/A027642)

fig.4 Ecco svelato il ruolo svolto dalle due matrici simili di fig.1

A questo punto alcune cose sono state spiegate ma l'uguaglianza di fig.1 resta ancora misteriosa. Se ora esprimiamo quella stessa facendo comparire le inverse delle tre matrici protagoniste, la sorpresa del lettore attento aumenta. Ecco dunque in figura 5 con il suo nuovo aspetto, la nostra uguaglianza iniziale.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -6 & 4 & 0 \\ 1 & -5 & 10 & -10 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

fig.5 La relazione di fig.1 “al negativo” cioè espressa mediante le rispettive matrici inverse è ancora più sorprendente. Qui il triangolo di Tartaglia vero e proprio non c'è più ma il suo impero si manifesta chiaramente.

Come si vede, in questa forma, le strane frazioni, apparentemente imprevedibili, sono scomparse. Tutto ora appare, almeno per chi ha familiarità con il triangolo di Tartaglia, facilmente prevedibile! Qui dovrebbe essere facile per il lettore individuare analoghe uguaglianze con matrici quadrate di maggiori dimensioni. Non altrettanto nella forma equivalente mostrata in fig. 1, neppure usando la pur formidabile formula di Faulhaber!

Quando circa dieci anni fa, da poco in pensione, scoprii questi notevoli prodotti tra matrici ne rimasi affascinato pur senza avere idea del perché mai si verificassero. Ero nel terzo di quattro fasi della mia vita, distanziate tra loro di oltre un decennio, in cui fui catturato dal fascino di questo problema. Ero appena riuscito allora a dimostrare rigorosamente che l'inversa della matrice dei coefficienti dei polinomi per le somme di potenze di interi successivi, erano dei triangoli di Tartaglia privati dell'ultimo elemento di ogni riga. Avevo scoperto questo durante la seconda fase, quando, mentre preparavo esercitazioni sulle proprietà delle matrici, da far svolgere ai miei studenti in laboratorio su un foglio di calcolo, decisi, per azzardata curiosità, di provare a invertire quella matrice di coefficienti, in maggioranza frazioni, che sul finire degli anni '70, mettendo in pratica i benefici dell'apprendimento per scoperta, mi ero costruito. Non sapevo ancora nulla all'epoca del problema che affrontai dopo aver trovato i primi casi particolari sugli esercizi di un libro di testo dei miei studenti. Quando dunque, in quella seconda successiva fase, in un attimo, il foglio di calcolo mi fornì la matrice inversa, grande fu la mia

meraviglia osservando un risultato in cui il caos che avevo cercato invano di dominare cercando di prevedere lo sviluppo di quei coefficienti, era scomparso! Sul momento però non feci altro. Solo molto tempo dopo non essendo riuscito a trovare la mia scoperta in letteratura, cercai una dimostrazione , la trovai e la pubblicai con la sua storia in un sito didattico [6]. Poi per un altro lungo periodo, dimenticai il problema. Ora, nella fase ancora in corso, ripreso l'argomento con rinnovato entusiasmo, ho scoperto e dimostrato molto altro tra cui il teorema generale mostrato in Fig.10 . Questo permetterà anche di spiegare facilmente l'uguaglianza introdotta all'inizio.
Ora che finalmente ho individuato il giusto punto di vista, messo a fuoco idee potenti e introdotto strumenti adeguati tutto mi appare straordinariamente semplice. Volendo comunicare al lettore questa visione del problema devo fare una premessa per fornire strumenti e linguaggio adeguati. L'oggetto matematico rivelatosi estremamente utile allo scopo è il seguente vettore che per analogia con le famose matrici chiameremo di Vandermonde

$$\vec{V}_m(n) = \begin{pmatrix} 1 \\ n \\ n^2 \\ \cdots \\ n^{m-1} \end{pmatrix} \quad \vec{V}_5(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{V}_5(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{V}_5(2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix} \quad \vec{V}_5(3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \\ 27 \\ 81 \end{pmatrix}$$

Fig.6 I vettori di Vandermonde

Se indichiamo con A_5 la matrice triangolare al centro di fig.5 (un triangolo di Tartaglia privato dell'ultimo elemento di ogni riga) inversa di quella dei coefficienti (al centro di fig.1), utilizzando i vettori di Vandermonde, possiamo esprimere la prima serie di polinomi di fig.4 in questo modo:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \vec{V}_5(k) = A_5^{-1} n \vec{V}_5(n) \qquad \sum_{k=0}^{n-1} \vec{V}_m(k) = A_m^{-1} n \vec{V}_m(n)$$

Fig.7 L'equazione per ottenere i polinomi per le somme di potenze di n interi successivi iniziando da 0. Caso particolare per sommatorie con esponenti da 0 a 4 e caso generale con m intero positivo per esponenti da 0 a m-1

Per esprimere, invece, la seconda serie, come dimostreremo, sarà sufficiente moltiplicare a sinistra per T_5 i due membri di questa equazione! Per dimostrare ciò basterà far notare un fatto fondamentale cioè che **moltiplicando la matrice di Tartaglia per il vettore di Vandermonde questa ne incrementa la base di un'unità**. Per vedere ciò basta sviluppare le potenze di *x+1* e scrivere il risultato come prodotto tra matrici, per esempio così:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x+1 \\ (x+1)^2 \\ (x+1)^3 \\ (x+1)^4 \\ (x+1)^5 \end{pmatrix}$$

Fig.8 La matrice di Tartaglia incrementa la base del vettore di Vandermonde

Analogamente sviluppando le potenze di x-1 si vede che l'effetto della moltiplicazione della matrice di Tartaglia a segni alternati sottrae un'unità alla base. Dunque , dato che i loro effetti moltiplicativi si annullano, la matrice di Tartaglia *T* e la sua copia a segni alternati T^{-1} sono inverse. e, in generale risulta $T^h \boldsymbol{V}(n) = \boldsymbol{V}(n+h)$. Per la proprietà distributiva risulterà anche

$$T^h \sum_{k=0}^{n-1} \vec{V}(k) = \sum_{k=0}^{n-1} T^h \vec{V}(k) = \sum_{k=0}^{n-1} \vec{V}(k+h) = \sum_{k=h}^{h+n-1} \vec{V}(k)$$

Fig.9 La proprietà distributiva trasla di h (intero relativo) la somma di potenze di interi successivi

Dunque nel caso h=1, m=5, come annunciato, ritroviamo la seconda serie di polinomi di fig.4. Se poi moltiplichiamo a sinistra i due membri dell'equazione generale di fig.7 per T^h otteniamo il teorema generale:

$$\sum_{k=h}^{h+n-1} \vec{V}(k) = T^h A^{-1} n \vec{V}(n)$$

Fig.10 Teorema generale per la determinazione dei primi m polinomi (indice sottointeso) per le somme di n interi successivi inizianti da un qualsiasi intero relativo h. Non soltanto da 0 o da 1 come la formula di Faulhaber, normalmente proposta in letteratura, permette

A questo punto il prodotto presentato all'inizio dovrebbe essere relativamente chiaro: la prima e la seconda matrice sono TA^{-1} e A^{-1} nel caso particolare m=5. Elementare quindi che il prodotto della prima per l'inverso della seconda sia *T (*per 5 e per qualsiasi altro intero positivo si volesse considerare).

A questo punto rimane solo da dimostrare il caso h=0. Per dimostrarlo agevolmente ci serve un altro potente strumento che si deduce anche questa volta dallo sviluppo delle potenze del binomio:

$$\begin{pmatrix} (n+1)-n \\ (n+1)^2-n^2 \\ (n+1)^3-n^3 \\ (n+1)^4-n^4 \\ (n+1)^5-n^5 \\ (n+1)^6-n^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 0 \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \\ n^5 \end{pmatrix}$$

$$(n+1)\vec{V}_6(n+1) - n\vec{V}_6(n) = A_6\vec{V}_6(n)$$

Fig.11 Il prodotto A**V**(n)=(n+1)**V**(n+1)-n**V**(n) in un caso particolare

Ora siamo pronti per la dimostrazione finale:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \vec{V}_m(k) = A_m^{-1} n\vec{V}_m(n)$$

Sottointendendo l'indice comune a matrice e vettori e moltiplicando i due membri dell'equazione per *A* si ottiene:

$$A\sum_{k=0}^{n-1} \vec{V}(k) = n\vec{V}(n)$$

per la proprietà distributiva:

$$\sum_{k=0}^{n-1} A\vec{V}(k) = n\vec{V}(n)$$

Per quanto visto in Fig.11

$$\sum_{k=0}^{n-1}((k+1)\vec{V}(k+1) - k\vec{V}(k)) = n\vec{V}(n)$$

Associando diversamente gli addendi:

$$\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\vec{V}(k+1) - \sum_{k=0}^{n-1} k\vec{V}(k)) = n\vec{V}(n)$$

esprimendo in modo equivalente:

$$\sum_{k=1}^{n} k\vec{V}(k) - \sum_{k=0}^{n-1} k\vec{V}(k)) = n\vec{V}(n)$$

Le due sommatorie hanno in comune n-1 addendi per cui nella sottrazione si semplificano quasi tutti i termini (effetto “telescopico”) tranne l’ultimo addendo della prima sommatoria e il primo della seconda che però vale zero:

$$n\vec{V}(n) - 0\vec{V}(0) = n\vec{V}(n)$$
$$n\vec{V}(n) = n\vec{V}(n)$$

L’ultima palese identità dimostra che sono tali anche tutte le altre equazioni equivalenti e quindi che il caso h=0 è dimostrato.

Esempio con h=-9 m=6

Applicando il teorema di Fig.10, calcolato il prodotto $T^{-9}A^{-1}$ abbiamo:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=-9}^{n-10} i^0 \\ \sum_{i=-9}^{n-10} i^1 \\ \sum_{i=-9}^{n-10} i^2 \\ \sum_{i=-9}^{n-10} i^3 \\ \sum_{i=-9}^{n-10} i^4 \\ \sum_{i=-9}^{n-10} i^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{19}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{541}{6} & -\frac{19}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -855 & \frac{541}{4} & -\frac{19}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{242999}{30} & -1710 & \frac{541}{3} & -\frac{19}{2} & \frac{1}{5} & 0 \\ -76665 & \frac{242999}{12} & -2850 & \frac{2705}{12} & -\frac{19}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \\ n^5 \\ n^6 \end{pmatrix}$$

e in forma equivalente:

$$\sum_{i=-9}^{n-10} i^0 = n$$
$$\sum_{i=-9}^{n-10} i^1 = -\frac{19}{2}n + \frac{1}{2}n^2$$
$$\sum_{i=-9}^{n-10} i^2 = \frac{541}{6}n - \frac{19}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3$$
$$\sum_{i=-9}^{n-10} i^3 = -855n - \frac{541}{4}n^2 - \frac{19}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^4$$
$$\sum_{i=-9}^{n-10} i^4 = \frac{242999}{30}n - 1710n^2 + \frac{541}{3}n^3 - \frac{19}{2}n^4 + \frac{1}{5}n^5$$
$$\sum_{i=-9}^{n-10} i^5 = -76665n + \frac{242999}{12}n^2 - 2850n^3 + \frac{2705}{12}n^4 - \frac{19}{2}n^5 + \frac{1}{6}n^6$$

oppure

$$\sum_{i=-9}^{n-10} i^0 = n$$
$$\sum_{i=-9}^{n-10} i^1 = \frac{-19n + n^2}{2}$$
$$\sum_{i=-9}^{n-10} i^2 = \frac{541n - 57n^2 + 2n^3}{6}$$
$$\sum_{i=-9}^{n-10} i^3 = \frac{-3420n + 541n^2 - 38n^3 + n^4}{4}$$
$$\sum_{i=-9}^{n-10} i^4 = \frac{222999n - 51300n^2 + 5410n^3 - 285n^4 + 6n^5}{30}$$
$$\sum_{i=-9}^{n-10} i^5 = \frac{-919980n + 242999n^2 - 34200n^3 + 2705n^4 - 114n^5 + 2n^6}{12}$$

Se il lettore proverà a fare altrettanto[2] nel caso m=6 h=10 comparando i due casi scoprirà qualcosa di molto interessante che potrà sfociare in un teorema generale che invito a individuare e possibilmente a dimostrare. La soluzione (eventualmente) nel prossimo numero.

Considerazioni finali.
L'autore, un ex insegnante da anni in pensione, si diletta nella ricerca matematica. Durante i suoi studi ha scoperto e dimostrato il teorema presentato e anche altri. Attualmente, nonostante le sue ormai lunghe ricerche, non sa se questi siano conosciuti o no[3]. Sicuramente però non sono stati divulgati come invece, per la più che millenaria storia del problema che risolvono, per le proprietà del famoso triangolo che evidenziano e anche per la loro bellezza intrinseca, a suo avviso, meritano.

Bibliografia

1. Jacob Bernoulli, *"Summae potestatum" in "Artis Conjectandi"*, Internet Archive (p.97),1713

2 Per i valori dati è stato usato un normale foglio di calcolo. Per ottenere i numeratori delle frazioni, in questo e negli altri casi, gli elementi delle righe vanno moltiplicati per la sequenza dei comuni denominatori A064538 : 1,2,6,4,30,12,42,24,90,20, 66,24...

3 In bibliografia [8] [9] [10] alcune pubblicazioni disponibili in rete che fanno uso di matrici in problemi connessi.

2. Attilio Frajese (a cura di), Opere di Archimede, UTET, 1974.
3. Sum of power of positive integer, Mathematical association of America (MMA), in https://www.maa.org
4. Frank J. Swetz and Victor J. Katz Johann ,Mathematical treasures: Faulhaber's Accademiae Algebrae, MMA
5. Donald Knuth, Johann Faulhaber and sums of powers, Internet Archive, 1992
6. Giorgio Pietrocola, *Esplorando un antico sentiero: teoremi sulla somma di potenze di interi successivi*, Maecla 2008
7. Mcmillan Sondow, Proof of power sum and binomial coefficient congruences via Pascal's identity, Internet Archive, 2010
8. Derby Nigel (2015) A search for sums of powers, *The Mathematical Gazzette*
9. L.E.Coen, Sums of powers and bernoulli numbers, Illinois, 1995
10. Gottfried Helms , Identities involving binomial-coefficients, Bernoulli- and Stirlingnumbers ,Univ Kessel 2006