Rapida dimostrazione per la somma di potenze di interi successivi.

+ di Giorgio Pietrocola (metodo perfezionato dopo lettera a Mario Barra del 5 maggio 2019)

Notazione adottata:

$$\vec{V}(i) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ i^2 \\ i^3 \\ i^4 \\ i^5 \end{pmatrix} \quad i\vec{V}(i) = \begin{pmatrix} i \\ i^2 \\ i^3 \\ i^4 \\ i^5 \\ i^6 \end{pmatrix} \quad \sum_{i=1}^{n} \vec{V}(i) = \vec{S}(n) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n i^0 \\ \sum_{i=1}^n i^1 \\ \sum_{i=1}^n i^2 \\ \sum_{i=1}^n i^3 \\ \sum_{i=1}^n i^4 \\ \sum_{i=1}^n i^5 \end{pmatrix}$$

Negli esempi i vettori, solo per motivi didattici, hanno sei componenti e le matrici 6x6 elementi ma la dimostrazione sarà valida per qualsiasi intero positivo.

Partiamo dalla seguente identità derivante dallo sviluppo della potenza di binomi:

$$\begin{pmatrix} i-(i-1) \\ i^2-(i-1)^2 \\ i^3-(i-1)^3 \\ i^4-(i-1)^4 \\ i^5-(i-1)^5 \\ i^6-(i-1)^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -6 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 10 & -10 & 5 & 0 \\ -1 & 6 & -15 & 20 & -15 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ i^2 \\ i^3 \\ i^4 \\ i^5 \end{pmatrix}$$

indicando la matrice a segni alternati ricavabile dal triangolo di Tartaglia con A segnato possiamo generalizzare l'identità scrivendo:

$$i\vec{V}(i) - (i-1)\vec{V}(i-1) = \overline{A}\vec{V}(i)$$

sommando membro a membro per i da 1 a n e semplificando (telescopicamente) gli opposti si ottiene:

$$\sum_{i=1}^{n}(i\vec{V}(i)-(i-1)\vec{V}(i-1))=\sum_{i=1}^{n}\overline{A}\vec{V}(i)$$

$$n\vec{V}(n)-(0)\vec{V}(0)=\overline{A}\sum_{i=1}^{n}\vec{V}(i)$$

$$n\vec{V}(n)=\overline{A}\vec{S}(n)$$

da cui moltiplicando a sinistra i due membri dell'equazione per la matrice inversa otteniamo:

$$\boxed{\vec{S}(n)=\overline{A}^{-1}n\vec{V}(n)}$$

che risolve in generale il problema della somma di potenze di interi successivi

Esempio nel caso di sette componenti:

$$\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{n} i^0\\ \sum_{i=1}^{n} i^1\\ \sum_{i=1}^{n} i^2\\ \sum_{i=1}^{n} i^3\\ \sum_{i=1}^{n} i^4\\ \sum_{i=1}^{n} i^5\\ \sum_{i=1}^{n} i^6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\ -1&2&0&0&0&0&0\\ 1&-3&3&0&0&0&0\\ -1&4&-6&4&0&0&0\\ 1&-5&10&-10&5&0&0\\ -1&6&-15&20&-15&6&0\\ 1&-7&21&-35&35&-21&7\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}n\\ n^2\\ n^3\\ n^4\\ n^5\\ n^6\\ n^7\end{pmatrix}$$

Esempio nel caso di undici componenti:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} i^{0} \\ \sum_{i=1}^{n} i^{1} \\ \sum_{i=1}^{n} i^{2} \\ \sum_{i=1}^{n} i^{3} \\ \sum_{i=1}^{n} i^{4} \\ \sum_{i=1}^{n} i^{5} \\ \sum_{i=1}^{n} i^{6} \\ \sum_{i=1}^{n} i^{7} \\ \sum_{i=1}^{n} i^{8} \\ \sum_{i=1}^{n} i^{9} \\ \sum_{i=1}^{n} i^{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{30} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{12} & 0 & \frac{5}{12} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{42} & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & 0 & -\frac{7}{24} & 0 & \frac{7}{12} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{30} & 0 & \frac{2}{9} & 0 & -\frac{7}{15} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{20} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{7}{10} & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{5}{66} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{11} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} n \\ n^{2} \\ n^{3} \\ n^{4} \\ n^{5} \\ n^{6} \\ n^{7} \\ n^{8} \\ n^{9} \\ n^{10} \\ n^{11} \end{pmatrix}$$

ossia:

$$\sum_{i=1}^{n} i^{0} = n$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^{1} = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^{2} = \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^{2} + \frac{1}{3}n^{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^{3} = \frac{1}{4}n^{2} + \frac{1}{2}n^{3} + \frac{1}{4}n^{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^{4} = -\frac{1}{30}n + \frac{1}{3}n^{3} + \frac{1}{2}n^{4} + \frac{1}{5}n^{5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^{5} = -\frac{1}{12}n^{2} + \frac{5}{12}n^{4} + \frac{1}{2}n^{5} + \frac{1}{6}n^{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^{6} = \frac{1}{42}n - \frac{1}{6}n^{3} + \frac{1}{2}n^{5} + \frac{1}{2}n^{6} + \frac{1}{7}n^{7}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^{7} = \frac{1}{12}n^{2} - \frac{7}{24}n^{4} + \frac{7}{12}n^{6} + \frac{1}{2}n^{7} + \frac{1}{8}n^{8}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^{8} = -\frac{1}{30}n + \frac{2}{9}n^{3} - \frac{7}{15}n^{4} + \frac{2}{3}n^{6} + \frac{1}{2}n^{8} + \frac{1}{9}n^{9}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^{9} = -\frac{3}{20}n^{2} + \frac{1}{2}n^{4} - \frac{7}{10}n^{6} + \frac{3}{4}n^{8} + \frac{1}{2}n^{9} + \frac{1}{10}n^{10}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^{10} = \frac{5}{66}n - \frac{1}{2}n^{3} + n^{5} - n^{7} + \frac{5}{6}n^{9} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{1}{11}n^{11}$$

Questi sono i polinomi che furono pubblicati nel libro Ars Conjectandi di Jacob Bernoulli nel 1713 pochi anni dopo la morte dell’autore.