L'essenziale sulle spirali logaritmiche

Giorgio Pietrocola

28 luglio 2022

Sommario

1 Una spirale non sempre correttamente intesa

A malintendere la "mirabile spira" studiata e ammirata da Jacob Bernoulli iniziò, a quanto si sa, lo scalpellino che avrebbe dovuto esaudire il desiderio del matematico svizzero di averla incisa sulla sua lapide insieme alla scritta "Eadem mutata resurgo". Le spire scolpite da quell'artigiano di Basilea del diciottesimo secolo si avvolgono mantenendo la stessa distanza tra loro e poi, esaurito lo spazio a disposizione, dopo pochi avvolgimenti, terminano nel punto centrale. Quella così realizzata però non corrisponde a una spirale logaritmica ma a una spirale di primo grado o archimedea così chiamata in onore del grande matematico greco che per primo la studiò. Le due spirali, rappresentate in coordinate polari, corrispondono la prima ad una funzione esponenziale ($\rho(\theta) = ae^{b\theta}$), la seconda ad un monomio di primo grado ($\rho(\theta) = k\theta$). Considerando una qualsiasi successione di angoli in progressione aritmetica $(0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha...)$ tramite le due funzioni si ottengono due diverse successioni riportate in tabella:

θ	$k\theta$	$ae^{b\theta}$
0	0	a
α	$k\alpha$	$ae^{b\alpha}$
2α	$2k\alpha$	$ae^{2b\alpha}$
3α	$3k\alpha$	$ae^{3b\alpha}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$

Nel caso della spirale archimedea si ha una progressione aritmetica con comune differenza (o ragione) $k\alpha$. Nel caso della spirale logaritmica invece si

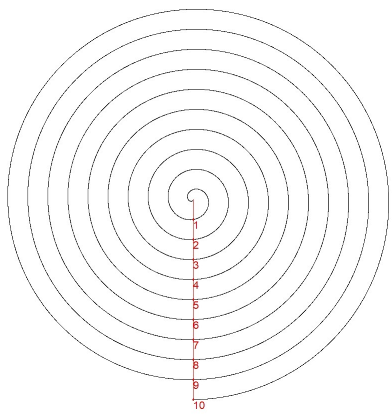

Figura 1: Spirale di primo grado come quella incisa per sbaglio sulla tomba di Jacob Bernoulli (coordinate polari, angolo in radianti, equazione $\rho = \frac{1}{2\pi}\theta$)

ha una progressione geometrica con comune quoziente (o ragione) $e^{b\alpha}$ Entrambe le spirali hanno il centro nel punto (0,0). Mentre però questo punto appartiene alla spirale archimedea non appartiene a quella logaritmica, di cui è solo un punto di accumulazione. Infatti essendo l'esponenziale sempre positivo, supposti i due parametri non negativi, si possono ottenere valori quanto si vuole vicini a zero facendo tendere θ verso $-\infty$. Scegliendo $\alpha = 2\pi$ radianti, nella progressione già presa in considerazione si succedono angoli che, dopo ogni nuovo giro, si sovrappongono, individuando così, attraverso le rispettive funzioni, una serie di punti, uno per ogni nuovo avvolgimento della propria spirale, su una stessa semiretta. In questo modo, nel caso della spirale archimedea si succedono valori in progressione aritmetica. Ogni giro i punti sulla semiretta avanzano di un passo costante. In un interpretazione dinamica il punto si muove di moto rettilineo uniforme con velocità $2\pi k$ per giro. Ciò rende possibile la seguente definizione:

La spirale archimedea è la traiettoria di un punto che si muove di moto rettilineo uniforme su una semiretta la quale ruota uniformemente intorno alla sua origine

Come si muove, invece il punto sulla semiretta nel caso della spirale logaritmica? Cercare su internet una risposta a questa domanda aiuta a capire quanto sia ancora oggi malintesa questa famosa spirale.

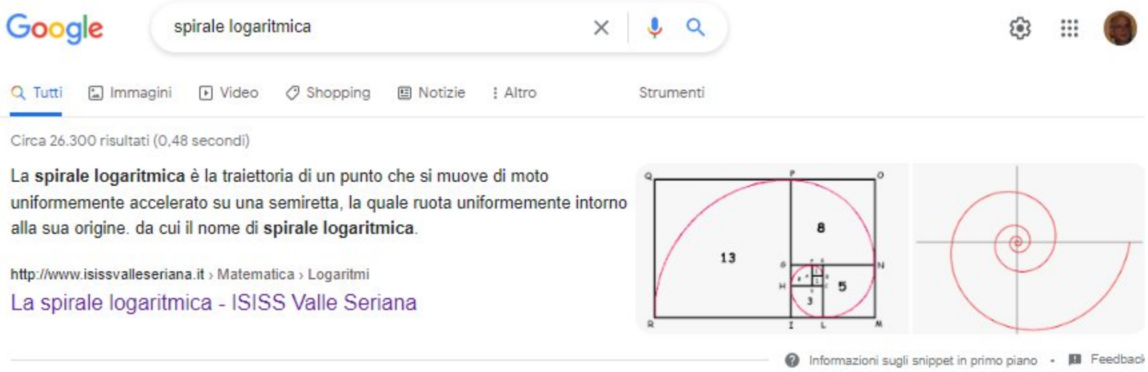

Figura 2: Cercando "spirale logaritmica" con il noto motore di ricerca

2 Un malinteso di gran successo

Immettendo "spirale logaritmica" il motore "Google" mette in primo piano la seguente definizione:

La spirale logaritmica è la traiettoria di un punto che si muove di moto uniformemente accelerato su una semiretta, la quale ruota uniformemente intorno alla sua origine.

Google però si sbaglia quella traiettoria è una spirale di secondo grado ($\rho(\theta) = k\theta^2$). Non è la logaritmica! Il guaio però è che Gooogle non si è inventato nulla ha solo riportato una definizione di spirale logaritmica assai in voga su internet in lingua italiana. Prima di stancarmi ho potuto contare più di venti siti che la riportano [1]. Tra questi non mancano riferimenti apparentemente autorevoli che sembrano far capo ad università italiane. Alcuni per giustificarla tirano in ballo addirittura Cartesio e il 1638 ma non vanno oltre nello specificare la presunta fonte. Ho trovato, invece, pochi libri che adottano questa definizione cinematica tra questi un'enciclopedia popolare del 1849![2]

Ma vediamo ora cosa succede realmente ai punti sulla semiretta nel caso della spirale logaritmica. Questa volta, dopo ogni giro, i valori si succedono in progressione geometrica. Mentre il rapporto tra valori consecutivi si mantiene costante la differenza tra un valore e il precedente, come in ogni progressione geometrica, forma ancora una progressione geometrica con la stessa ragione. Per questo motivo la distanza tra i punti aumenta progressivamente. La velocità con cui a ogni giro, in tempi uguali, si sposta il punto però non aumenta linearmente come nel moto uniformemente accelerato ma esponenzialmente, essendo ogni volta incrementato da uno stesso fattore, la ragione della progressione. Anche l'accelerazione, lungi dal mantenerrsi costante, aumenta con legge esponenziale!

3 Un'efficace divulgazione

Probabilmente se la committenza avesse spiegato bene a quello scalpellino che spirale dovesse essere realizzata il risultato sarebbe stato soddisfacente. Ma come spiegare a un non matematico cosa è e cosa non è una spirale logaritmica? Credo sia meglio evitare per quanto possibile, di basarsi su concetti troppo tecnici come i logaritmi o la costante di Nepero che potrebbero confondere risultando sconosciuti o dimenticati. Anche iniziare scomodando la cinematica non mi sembra una buona idea. Meglio, essendoci la possibilità, fare leva su concetti più semplici, diffusi e ben radicati nella cultura popolare. Sarebbe stato sufficiente spiegare che le spire della nostra spirale devono distanziarsi sempre più allontanandosi dal centro? No. Questa semplice condizione è solo necessaria e anche se, presumibilmente, avrebbe permesso una realizzazione più vicina alla richiesta , sarebbe stata insufficiente. Il concetto fondamentale per un' efficace spiegazione di questa curva è quello di proporzione, un concetto che nessuno che voglia rappresentare qualcosa in uno spazio ridotto può permettersi di ignorare e che quindi è ben radicato nella cultura degli artigiani. Il nome spirale proporzionale che qualche volta si usa in alternativa mi sembra più adatto alla divulgazione. Le spire della nostra curva infatti non solo devono distanziarsi sempre più allontanandosi dal centro ma lo devono fare in modo proporzionale. Qualsiasi punto si consideri in una delle spire della curva, la distanza con la spira successiva e la distanza con la spira precedente devono mantenere un rapporto costante. Questo rapporto, che indicheremo con q, è detto fattore di accrescimento ed è in grado, da solo, di caratterizzare e distinguere tra loro le varie spirali logaritmiche. A volte si pone $q = 1 + i$ essendo i il tasso di incremento per giro analogamente a quanto si fa in matematica finanziaria con la capitalizzazione composta. La successione dei numeri che esprimono la distanza tra due spire successive forma una progressione geometrica senza inizio e senza fine. Allontanandosi dal centro si hanno distanze tra spire sempre più grandi avvicinandosi invece le distanze si fanno sempre più piccole in un avvolgimento senza fine intorno all'irraggiungibile punto centrale.

4 Un grafico esplicativo

Un grafico che utilizza un tratto di spirale logaritmica caratterizzata da un fattore di accrescimento 2 pari ad un tasso di incremento del 100% aiuterà

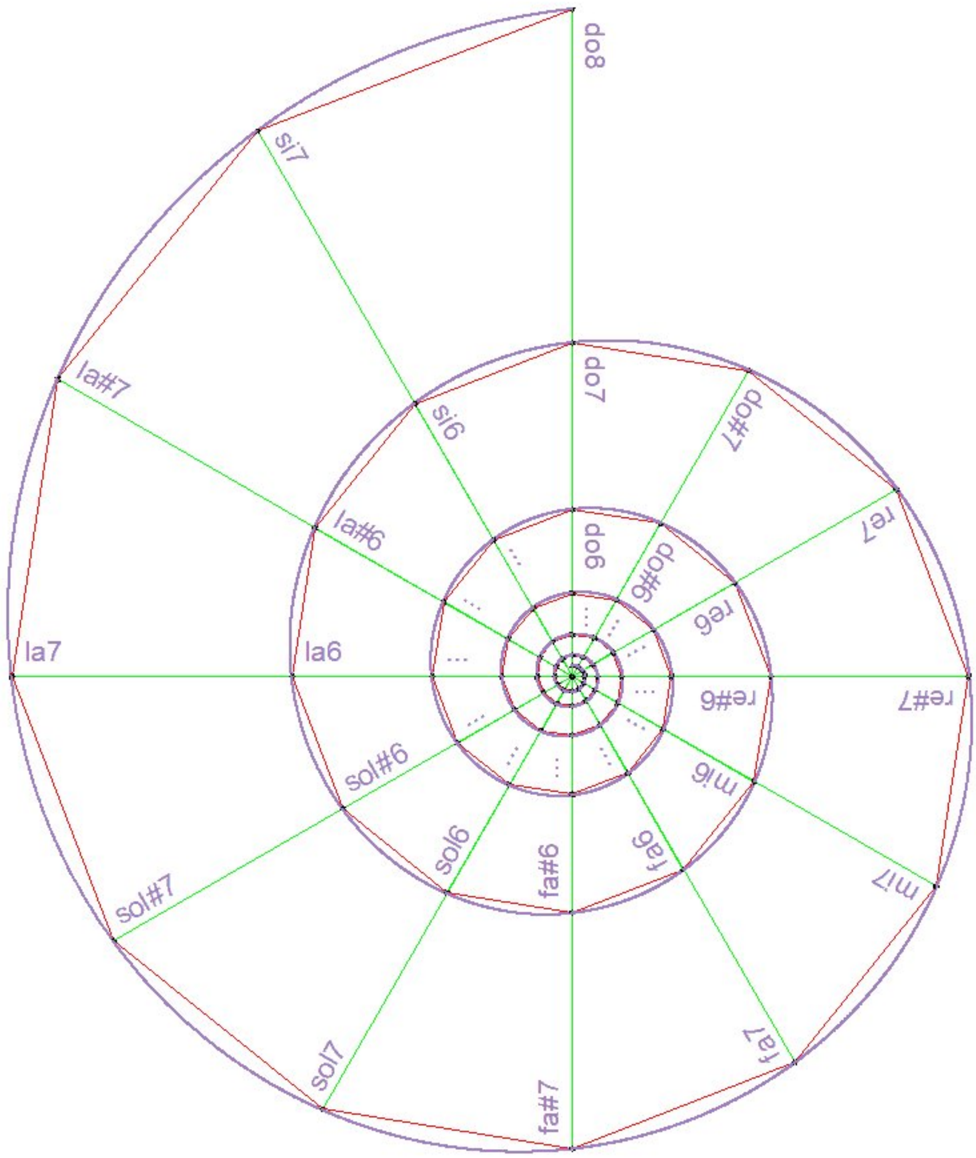

Figura 3: Temperamento equabile, scala: grafico in coordinate polari della variazione della frequenza delle note, da 65 a 4186 Hz

a comprendere meglio la natura di questa curva e darà anche suggerimenti per la sua costruzione. Come si può vedere nel grafico mostrato in figura 3, dal centro della spirale partono dodici semirette che dividono l'angolo giro in altrettante parti uguali ripartendo il piano in angoli di 30 gradi. Ogni semiretta interseca più volte il tratto di spirale avvolgente rappresentata individuando punti corrispondenti a una stessa nota ma di altezza crescente. Nel grafico la distanza relativa ad ogni punto intersecato dal centro della spirale, detto polo, rappresenta la frequenza. Sia il punto iniziale più vicino al centro che quello finale più lontano, separati da 6 ottave, così come tutti i punti della loro semiretta, corrispondono al do. Su una stessa semiretta si individua sempre la stessa nota ma dopo il primo punto, ogni volta il valore precedente raddoppia passando all'ottava superiore secondo la terminologia adottata dai musicisti. Anche la distaza tra una spira e l'altra raddoppia ogni giro. Come la capacità ricettiva del nostro apparato uditivo che può percepire onde sonore solo all'interno di un certo intervallo di frequenze, anche il tratto di spirale logaritmica mostrata è limitato sia superiormente, per escludere valori della frequenza dell'onda troppo alti, che inferiormente, per escludere i troppo bassi. Allontanandosi dal centro lungo il tratto di spirale rappresentata, i raggi, un semitono dopo l'altro, individuano note sempre più alte, aumentando di lunghezza in progressione geometrica. In questo viaggio si passa così dai 65,40639133 Hz del do_2 del raggio minore ai circa 4186 Hz del do_8 del raggio maggiore passando per i 440 Hz del la_4 conformemente alla convenzione internazionale. In questo intervallo, raddoppiando ogni giro, in sei giri, la frequenza della nota, come la lunghezza del raggio che la rappresenta, aumenta esattamente di $2^6 = 64$ volte.

5 Fattore di accrescimento frazionato

Se invece di considerare il fattore di accrescimento q dopo ogni giro lo consideriamo dopo ogni ennesimo $(\frac{1}{n})$ di giro, come diventa? Il nuovo fattore r dovrà essere moltiplicato per se stesso n volte per avere q. Dunque la risposta è nell'equazione $r^n = q$ cioè $r = q^{\frac{1}{n}}$. Nel nostro caso in cui $q = 2$ ed $n = 12$ si ha $r = 2^{\frac{1}{12}} = 1,059463094...$ il che corrisponde $i = 0,059463094$ indicante un tasso di crescita della frequenza dei semitoni di poco inferiore al 6%

Possiamo, come si fa di solito con le progressioni geometriche, indicare il generico termine della progressione con s_i avendo $s_i = cr^i$ e in particolare il primo termine che nel nostro grafico è $s_0 = c = 65.40639133$ $s_{72} = 4186$ (circa). Indicando con c il raggio più corto la nostra progressione sarà

$$c, cr, cr^2, cr^3, ..., cr^{11}, cr^{12}, cr^{13}, ..., cr^{24}, ..., cr^{36}, ..., cr^{48}, ..., cr^{60}, ..., cr^{72}$$

raddoppiando ogni giro il raggio più lungo è 2^6 volte il più corto. Si trova facilmente $r = 2^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{2}$ da cui anche $cr^{12} = 2c$, $cr^{24} = 4c$, $cr^{36} = 8c$, ... L'esponente di r, da 0 fino a 72 ci aiuta a ordinare e contare i semitoni e anche a classificarli. Infatti dividendo l'esponente corrispondente a una particolare nota della scala per 12, troviamo il quoziente intero che, sommato 2, ci indica l'ottava di appartenenza mentre il resto della divisione ci indica il nome della nota: Resto 0 do, resto 2 re, resto 4 mi, resto 5 fa, resto 7 sol, resto 9 la, resto 10 si. La forma del grafico proposto non solo ricorda il guscio di una chiocciola ma, non a caso, si ritrova in una componente del nostro orecchio interno facente parte dell'organo dell'udito: la coclea. Anche se il grafico è solo un tratto della spirale logaritmica, può essere prolungato con ulteriori raggi al ritmo della progressione sia verso l'infinitamente grande che verso l'infinitamente piccolo. Analogamente la progressione geometrica considerata si potrà estendere all'infinito nei due versi opposti:

$$...cr^{-2}, cr^{-1}, c, ..., cr^{72}, cr^{73}, cr^{74}, ...$$

Unendo con un segmento, a due a due, i punti terminali di raggi consecutivi, otteniamo una serie di triangoli simili e anche una poligonale (in rosso nel grafico) interpolante la spirale. In virtù della similitudine dei triangoli facilmente dimostrabile anche i segmenti di questa poligonale che approssima la spirale formano una progressione geometrica con ragione $r = 2^{\frac{1}{12}}$. Come si dimostra facilmente, l'angolo di deviazione tra un segmento e il successivo coincide con l'angolo di suddivisione che nel nostro caso è 30 gradi. Per una poligonale che approssimi meglio si deve dividere l'angolo giro in più parti uguali, ad esempio 24, 48, 96 ... ottenendo approssimazioni ogni volta migliori che hanno per limite la spirale logaritmica. La costruzione di una successione di triangoli simili con riga e compasso non presenta difficoltà ma può rivelarsi una procedura troppo lunga. Molto meglio servirsi di programmi informatici che hanno implementata la cosiddetta geometria della tartaruga; per esempio l'MSWLogo, distribuito gratuitamente dalla Softronix [3], con cui sono state realizzate le figure associate a questo articolo. Vedi anche figura 4.

6 Sull'equazione della spirale logaritmica

Per quanto visto, volendo esprimere con un'equazione la curva protagonista del nostro grafico viene naturale scrivere:

$$\rho(\theta) = c2^{\frac{1}{2\pi}\theta}$$

Infatti così inizialmente abbiamo $\rho(0) = c$, dopo un giro pari a 2π radianti si ha $\rho(2\pi) = 2c$ e dopo 6 giri si ha $\rho(12\pi) = 64c$. Se però confrontiamo questa

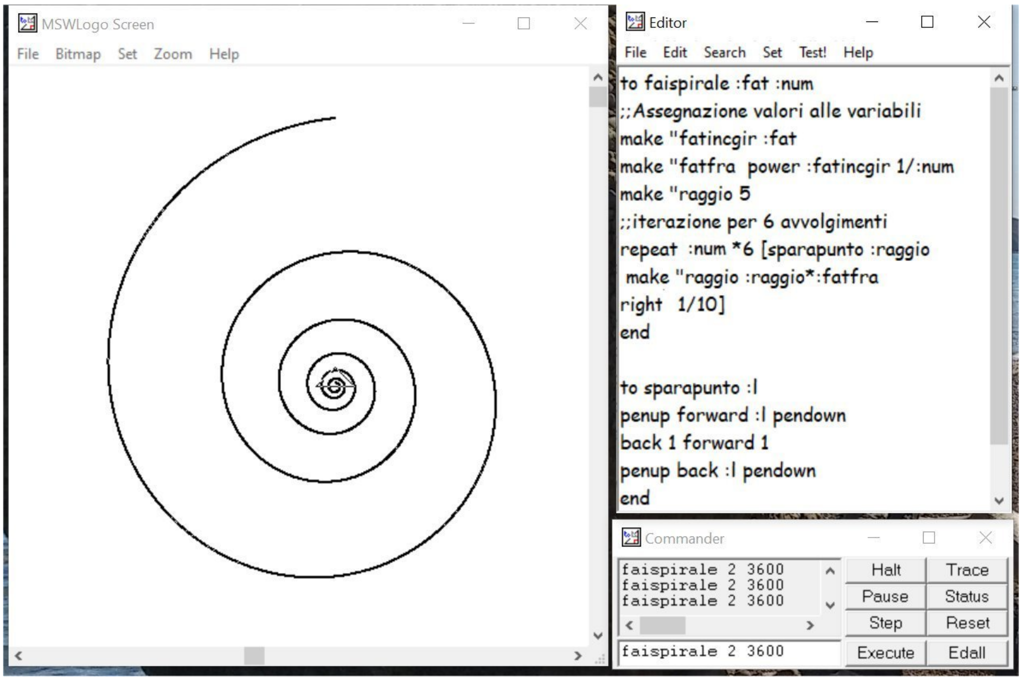

Figura 4: Tre finestre dell'MSWLogo: le poche istruzioni necessarie per generare un tratto di spirale logaritmica visibili nella finestra "Editor" , poi c'è la finestra "Commander" in cui, immettendo
"faispirale 2 3600", si ottiene quanto appare nella finestra "Screen".

equazione esponenziale con quella comunemente usata $\rho(\theta) = ae^{b\theta}$ potremmo avere qualche difficoltà nel riconoscerla. Chi conosce però i logaritmi e le loro proprietà può comprendere facilmente che la nostra equazione può scriversi equivalentemente nella forma

$$\rho(\theta) = ce^{ln2^{\frac{\theta}{2\pi}}} = ce^{\frac{ln2}{2\pi}\theta} = ce^{b\theta}$$

e che quindi nei due casi a coincide con c e $b = \frac{ln2}{2\pi}$. Tutto ciò si generalizza facilmente a un fattore q di accrescimento qualsiasi. Come si può vedere quindi il fattore c indica solo il punto dove si inizia a considerare la spirale ma non la sua forma. Questa è invece determinata unicamente dal fattore di accrescimento e quindi dal parametro b.

Riferimenti bibliografici

[1] Alcuni dei tanti siti in cui compare una presunta definizione cinematica di spirale logaritmica:

- dm.unife.it
- macosa.dima.unige.it
- www.1001storia.polimi.it
- www.matematicaescuola.it, corso luarea Lecce p.9 es.4.3
- /webthesis.biblio.polito.it, p.44
- www.math.it
- Leo Major, Spirale logaritmica, YouTube, 2020

[2] Libri in cui compare la stessa definizione fuorviante di spirale logaritmica

- Renato Betti, Geometria leggera: introduzione all'idea di spazio matematico,Franco Angeli 2015 2.2 Le curve nel piano
- Nuova enciclopedia popolare 1849 Spirale logaritmica

[3] Sito Softronix

[4] Vocabolario animato del Tartapelago, Maecla, 2005

[5] Poligonali logaritmiche, Maecla 2005