Sui polinomi per somme di potenze di interi successivi

di Giorgio Pietrocola

giorgio.pietrocola[at]gmail.com

ricerca ancora in corso, febbraio 2018:

Sommario

Si affronta il problema classico della determinazione dei coefficienti dei polinomi per il calcolo delle somme di potenze di interi successivi seguendo una via diversa da quella tradizionale. Inizialmente il problema si risolve e si generalizza a interi successivi ovunque inizianti senza ricorrere all'uso dei numeri di Bernoulli che vengono poi definiti non partendo dallo sviluppo in serie infinite della funzione generatrice come da tradizione ma mediante le stesse matrici, derivanti dal triangolo di Tartaglia, già introdotte. Con queste ultime si dimostra e si generalizza anche la tradizionale formula di Faulhaber sostituendo in essa i numeri di Bernoulli, diventati un caso particolare, con infinite sequenze calcolate dai noti polinomi di Bernoulli espressi a loro volta da semplici operazioni con le matrici. Per questa via vengono anche dimostrate le proprietà di questi polinomi. Infine si trovano le funzioni generatrici delle sequenze bernoulliane e si dimostra di nuovo la formula generalizzata adattando opportunamente la dimostrazione comunemente adottata.

Indice

1. Storia della somma di potenze di interi successivi

1.1 Il problema

$$\sum_{k=1}^{n} k^0 = 1^0 + 2^0 + 3^0 + \cdots + n^0 = n$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^1 = 1^1 + 2^1 + 3^1 + \cdots + n^1 = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3$$
$$\ldots$$

In 2.1,5 le stesse tre equazioni presentate qui espresse con le matrici

Il problema consiste nell'ottenere la somma di un certo numero *n* di potenze di interi successivi elevati a un certo esponente intero non negativo *m* mediante un polinomio che ne faciliti il calcolo. Con *m*=0 il problema è banale perché gli *n* addendi valgono tutti 1 e la somma è quindi *n* (polinomio, più precisamente monomio, di primo grado). Con *m*=1 si tratta di trovare la somma dei primi *n* numeri naturali e si può risolvere rapidamente pensando di raddoppiare somma e risultato, associando opportunamente addendi crescenti e decrescenti delle due somme si ottiene *n* volte 1+*n*, dividendo per due come quando si calcola l'area di un triangolo si arriva al polinomio di secondo grado cercato. Nei casi successivi esiste sempre un polinomio di grado via via crescente, ma mentre alcuni coefficienti dei monomi appaiono facilmente prevedibili altri sembrano succedersi in modo piuttosto caotico.

1.2, Introduzione storica

La storia della matematica mostra come questo problema abbia attratto i matematici sin dall'antichità. Il caso con esponente uno era ben conosciuto sin dai tempi di Pitagora e della sua Scuola. I numeri generati furono chiamati triangolari perché al crescere di *n* formano una sorta di triangolo di questo tipo:

*
* *
* * *
* * * *

……...
e quindi si possono contare con la stessa idea che è alla base del calcolo dell'area del triangolo: raddoppiare per un calcolo più semplice per poi dimezzare successivamente.
Si ottiene così:

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

Il caso successivo è la somma di quadrati degli interi che si trova dimostrato in Sfere [2] di Archimede (287- 212 a.C.) alla proposizione decima:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

Il caso della somma di cubi poi è il bel teorema di Nicomaco di Gerasa (60-120 circa) che dimostra che il risultato è il quadrato della somma delle basi (caso m=1):

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$$

che in forma compatta si esprime come:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$

e quindi tenendo conto di quanto visto per l'esponente uno:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$$

Nei secoli, in vari periodi è continuata la ricerca di questi polinomi al crescere del grado dell'esponente. Altri matematici al trascorrere dei secoli hanno dato grossi contributi sia trovando polinomi in casi successivi sia indicando vari metodi per estendere questa ricerca. Tra questi [3] citiamo: Aryahabhata (476-?), India, Bakr al-Karaj (?-1019), Iraq, Abu Ali al-Hasan (965-1039), Egitto, Thomas Harriot (1560,1621), Inghilterra, Pierre de Fermat (1601-1665), Nel 1631 il tedesco Jhoann Faulhaber (1580-1635) pubblica su Academia Algebrae un suo studio dove presenta molti polinomi che risolvono il problema in casi particolari arrivando fino alla diciassettesima potenza senza però indicare una legge generale valida per ogni esponente. Un cenno anche al notevole contributo di Pascal (1623-1662) che attraverso un'identità [7] data da una sommatoria i cui addendi, tranne il primo e l'ultimo si semplificano a due a due con effetto "telescopico", mostrò un modo ricorsivo per ottenere i vari polinomi al crescere degli esponenti. Questa rapida panoramica per arrivare finalmente, a Jacob Bernoulli (1654-1705) e al suo Ars Conjectandi pubblicato postumo nel 1713. Nel libro, consultabile in rete, a pag 97, sono riportati i polinomi di cui stiamo parlando che è possibile vedere nell'esempio 3.2.1

,

.La novità della pubblicazione non era tanto nei polinomi mostrati quanto nella formula generale che cominciava così:

$$\sum_{k=1}^{n} k^m = \frac{1}{m+1} n^{m+1} + \frac{1}{2} n^m + \ldots$$

Fin qui, per i due monomi di maggior grado, nulla di nuovo anzi la facile conferma di quanto si era potuto osservare. Il grado dei polinomi che esprimono queste somme cresce con regolarità mantenendosi di una unità superiore all'esponente delle potenze sommate. Il coefficiente di grado massimo è il reciproco dell'esponente del suo monomio mentre il coefficiente avente lo stesso grado delle potenze sommate, è costante. Ma erano gli altri coefficienti, che potete vedere nell'esempio citato precedentemente, il vero problema. Questi vennero espressi in funzione di particolari numeri, parzialmente caotici non meno dei coefficienti che determinano, introdotti nell'occasione che poi furono chiamati numeri di Bernoulli. Ecco i primi degli infiniti valori [1]:

$$B_0 = 1 \quad B_1 = \pm\frac{1}{2} \quad B_2 = \frac{1}{6} \quad B_3 = 0 \quad B_4 = -\frac{1}{30} \quad B_5 = 0 \quad B_6 = \frac{1}{42} \quad B_7 = 0 \quad B_8 = -\frac{1}{30} \quad B_9 = 0 \quad B_{10} = \frac{5}{66}$$

Ben presto questi numeri acquisiranno una notevole autonomia che li porterà,

1 I primi due numeri della sequenza furono aggiunti e considerati tali solo molto più tardi.

come vedremo, perfino a far dimenticare la loro formula madre. Questi numeri compariranno infatti in contesti matematici assai diversi come nello sviluppo di funzioni in serie infinite che verranno utilizzate sia per la loro definizione sia per dimostrare[2] la formula rivelata ma non dimostrata

1.3 Storia delle mie ricerche

Nel mio piccolo ovvero nella mia storia individuale, a somiglianza di quanto accaduto nella storia collettiva dell'umanità, questo problema è stato capace di attrarre attenzione su di sé arrivando, qualche volta, quasi a catturare la mia mente.Come mi accingo a raccontare, questo è accaduto in quattro fasi della mia vita distanziate tra loro, mediamente, di oltre un decennio. Tre brevi periodi, ormai remoti e un quarto, ancora in corso che promette di essere molto più lungo.

1.3.1 Prima fase, raccolta di dati.

La prima fase iniziò sul finire degli anni '70 quando avevo appena cominciato la mia attività di Insegnante di scuola media superiore. Negli esercizi dei libri di testo consultati mi avevano colpito alcuni casi particolare del problema in questione che allora non conoscevo e in cui mi ero imbattuto. Incuriosito da quei polinomi che fornivano risultati di sommatorie, prima di approfondire l'argomento in letteratura, ignaro di una lunga storia, decisi di affrontare direttamente il problema mettendo in atto un'esplorarare matematica autonoma. Feci questo per passione ma anche per esercitarmi in modo costruttivo sfruttando il divertimento naturale che l'apprendimento per scoperta procura. Convinto dai pochi casi particolari visti che doveva esistere, per ogni esponente intero positivo, un polinomio calcolante le somme degli interi successivi elevati a potenza, mi misi alla ricerca di questi polinomi per avere dati su cui riflettere. Ne trovai una decina prima di fermarmi inevitabilmente di fronte all'infinito senza riuscire a scoprire una legge che permettesse di prevedere i risultati ogni volta più laboriosi da calcolare. Trovai questi polinomi in un modo forse non molto elegante ma efficace. Usai infatti l'interpolazione lineare servendomi, come strumento di calcolo, di una delle prime macchine calcolatrici programmabili, la TI59, da poco comparse sul mercato poco prima dell'avvento dei personal computer. Imparato il primitivo linguaggio SOA e programmata opportunamente la macchina, di volta in volta, con rinnovata soddisfazione, riuscivo a trovare un nuovo polinomio della serie. Cercavo di capire in che modo variassero quei coefficienti all'aumentare del grado del polinomio

2 Una dimostrazione analitica della formula di Faulhaber è disponibile qui: http://planetmath.org/sites/default/files/texpdf/41499.pdf

stesso. Mi sforzavo così, ogni volta, di prevedere i successivi ma mentre per alcuni l'impresa era sin troppo facile, per altri la situazione continuava ad apparire sempre più caotica e proibitiva. Alla fine mi arresi ma conservai gelosamente i coefficienti trovati, sotto forma di matrice, su un quaderno di appunti.
Arrivato a un punto morto approfondii sui testi che riuscii a trovare. Feci questo con molto interesse perché quando si è affrontato un problema, anche se con poca fortuna, le idee e i modi con cui il problema viene risolto brillantemente restano molto più impresse nella mente. Arrivai così a conoscere la formula rivelata da Bernoulli e detta di Faulhaber. Questa risolve il problema di determinare i coefficienti dei polinomi al crescere degli esponenti facendo riferimento ai cosiddetti numeri di Bernoulli, appositamente introdotti insieme alla formula agli inizi del diciottesimo secolo. Non trovai però questo metodo, che pure ammiravo, del tutto soddisfacente. Se è vero infatti che risolveva brillantemente il problema, è anche vero che i numeri introdotti, come i coefficienti che determinava, variavano, all'interno di certe regolarità, in modo altrettanto caotico anche se erano perfettamente determinati da ben precise relazioni ricorsive. Presto mi accontentai di quel che avevo trovato e dimenticai, o quasi, il problema per molti anni.

1.3.2 Seconda fase, la scoperta.

La seconda fase è caratterizzata da una scoperta abbastanza casuale fatta una quindicina di anni dopo. Mentre, usando il mio computer personale, preparavo su fogli di calcolo esercitazioni sulle proprietà delle matrici da far svolgere ai miei studenti in laboratorio, avendo non so bene come, quel vecchio quaderno a portata di mano, forse per un residuo di curiosità rimasto insoddisfatto, decisi, senza troppa convinzione, di provare a invertire quella matrice di coefficienti, in maggioranza frazioni, che molto tempo prima mi ero costruito con cura. Quando, in un attimo, il foglio di calcolo mi fornì la matrice inversa richiesta, grande fu la mia meraviglia osservando un risultato del tutto inaspettato in cui il caos che avevo cercato invano di dominare prevedendo quei coefficienti sfuggenti, era scomparso!
Tutto era diventato facilmente prevedibile almeno per chi, come me, aveva familiarità con il triangolo di Tartaglia. Di diverso da questo famoso triangolo aritmetico c'erano solo i segni che erano alternati e la mancanza dell'ultimo elemento di ogni riga. Cercai invano, nei testi che riuscii a consultare, tracce di quanto avevo scoperto. Dopo non molto però, avendo poca voglia e poco tempo per fare ricerche più accurate finii per dimenticare, o quasi, per molto tempo, la mia scoperta.

1.3.3 Terza fase, la dimostrazione.

Quando finalmente nel 2007 andai in pensione ripresi le mie ricerche cercando ancora in altrui pubblicazioni, almeno qualche traccia di quello che avevo scoperto. Erano trascorsi più di un decennio dalla scoperta ma Internet era ormai molto più potente e molta matematica era stata messa in rete. Grazie ai potenti motori di ricerca, e alla velocità di trasmissione raggiunta, cercare in rete ora era molto più agevole e produttivo. Però continuai a non trovare nulla. Decisi allora di mettere per iscritto la mia scoperta e le sue connessioni come la formula che permette di esprimere, mediante matrice, i numeri di Bernoulli. Formula anche lei mai trovata in circolazione. Mi resi conto che per fare questo avrei dovuto dimostrare in modo rigoroso i miei risultati come ancora non avevo mai fatto. L'impresa non mi sembrava facile ed ero tutt'altro che sicuro di farcela. Però mi misi alla prova e alla fine riuscii nel mio intento. Decisi così, nel 2008, di pubblicare i miei teoremi, con la loro storia in un sito didattico [6] . Fatto quanto mi ero proposto, per un altro decennio cessai di occuparmi della questione.

1.3.4 Quarta fase (in corso), il trattato

Quando nel marzo del 2017, dimenticato completamente il problema, decisi di rivedere quel che avevo scritto dieci anni prima, faticai un po' a capire la mia stessa dimostrazione. Questo perchè, per potermi esprimere adeguatamente, avevo premesso molte definizioni che poi però non era facilissimo tenere a mente per seguire il ragionamento dimostrativo. Decisi allora di riscrivere quelle dimostrazioni in modo più accessibile e così feci. Contemporaneamente decisi anche di sviluppare le conseguenze delle mie scoperte dimostrando più cose possibili partendo dai teoremi che avevo dimostrato. Normalmente i numeri di Bernoulli vengono definiti per via analitica partendo dagli sviluppi in serie, io invece li ho definiti partendo dalle matrici dei coefficienti polinomiali. Alcune proprietà come la formula ricorsiva per la generazione dei numeri bernoulliani erano immediate conseguenze mentre altre, come la dimostrazione dell'annullarsi alternato di quegli stessi numeri, hanno reso necessari l'introduzione di una relazione tra matrici con elementi uguali in modulo ma alternativamente opposti e lo studio delle sue proprietà. La maggior difficoltà l'ho incontrata nella dimostrazione della formula detta di Faulhaber e rivelata da Bernoulli ma dimostrata più di un secolo dopo, per via analitica, da Jacobi. Strada facendo ho avuto il piacere di scoprire molte altre cose che ho riportato e organizzato in un trattato.

2. Elementi introduttivi

2.1 Algebra delle matrici

Per capire questo trattato è necessaria una conoscenza dell'algebra a livello di scuola media superiore. In particolare bisogna avere nozioni elementari di algebra delle matrici:

2.1.1 Nozioni sulle matrici

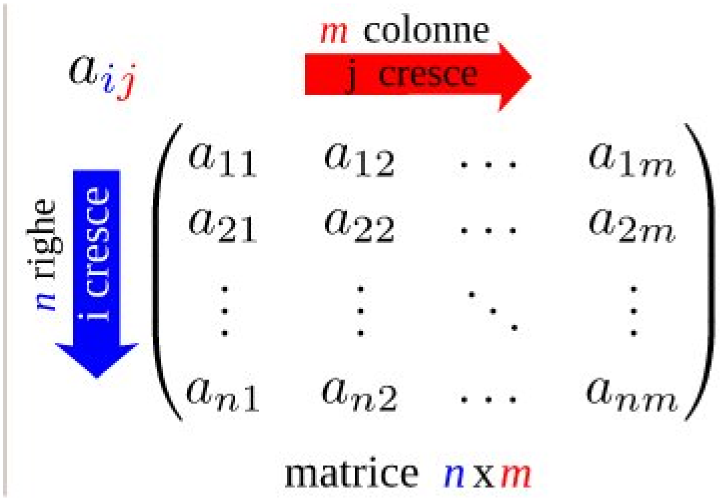

Figura tratta dalla [voce"Matrice"] su wikipedia.it a cui si rimanda per approfondimenti

In particolare qui verranno usate matrici quadrate di n righe e n colonne e anche quelle di n righe e 1 colonne dette vettori..

2.1.1.1 Matrici triangolari

Le matrici che verranno qui considerate saranno quasi sempre matrici triangolari inferiori.Le matrici triangolare sono matrici quadrate che hanno elementi nulli sopra (quelle inferiori) o sotto (quelle superiori) la diagonale principale. Ecco come si presenta una matrice triangolare (inferiore):

$$L = \begin{pmatrix} [L]_{1,1} & 0 & \cdots & & 0 \\ [L]_{2,1} & [L]_{2,2} & & & \\ [L]_{3,1} & [L]_{3,2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ [L]_{m,1} & [L]_{m,2} & \cdots & [L]_{m,m-1} & [L]_{m,m} \end{pmatrix}$$

Figura tratta e modificata dalla [voce"Matrici triangolari"] su wikipedia.it a cui si rimanda per approfondimenti

2.1.2 Determinante di una matrice

Per approfondimenti si può vedere, per esempio, su wikipedia (voce determinante). Qui questo concetto è utilizzato più volte. Si tenga presente che nelle matrici triangolari il determinante è semplicemente il prodotto degli elementi della diagonale principale. Nel seguito in alcune dimostrazioni verrà utilizzato anche lo sviluppo di Laplace.

2.1.3 Operazioni con le matrici

Ci serviremo delle seguenti operazioni

operazioni di somma tra matrici

prodotto righe per colonne tra matrici (compatibili)

prodotto tra una matrice (o un vettore) e uno scalare

2.1.4 Proprietà delle operazioni

Faremo spesso riferimento alle proprietà delle operazioni. Si noti che mentre ovviamente la somma è commutativa, non è commutativo invece il prodotto righe per colonne.
Le proprietà che utilizzeremo sono:

$A+B=B+A$ commutativa della somma tra matrici
$(A+B)+C= A+(B+C)$ associativa della somma
$(AB)C=A(BC)$ associativa del prodotto
$A(B+C)=AB+AC$ distributiva del prodotto rispetto alla somma
$AA^{-1}=I$ se determinante di A non nullo
$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ l'inversa di un prodotto è il prodotto delle inverse al contrario
$aA=Aa$ commutatività del prodotto tra matrice e scalare
$\det(AB)=\det(A)\det(B)$ Il determinante di un prodotto è il prodotto dei determinanti

2.1.5 Equazioni espresse mediante prodotto di matrici

L'argomento di questo trattato presentato in 1.1 espresso come prodotto di matrici.

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} k^0 \\ \sum_{k=1}^{n} k^1 \\ \sum_{k=1}^{n} k^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} n \\ n^2 \\ n^3 \end{pmatrix}$$

Qui l'asterisco indica l'operazione di prodotto righe per colonne. Il simbolo più spesso sarà omesso o ridotto a semplice punto come si fa normalmente con il prodotto ordinario tra numeri.

2.2 Legenda

Qui vengono presentati i simboli introdotti per affrontare il problema

2.2.1 Le matrici protagoniste

Per indicare particolari matrici triangolari di m righe e m colonne useremo i seguenti simboli: A_m T_m Z_m I_m J_m N_m . Per non appesantire troppo la notazione a volte gli indici dimensionali potranno essere omessi. Ecco alcuni esempi 4x4

$$T_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \end{pmatrix} \qquad Z_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad J_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad N_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

T_m è una matrice triangolare costruita come il triangolo di Tartaglia, i suoi elementi sono definiti da:

$$[T_m]_{i,j} = \begin{cases} \binom{i-1}{j-1} & \text{se } i > j-1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

A_m è una matrice triangolare costruita come il triangolo di Tartaglia ma priva dell'ultimo elemento di ogni riga, i suoi elementi sono definiti da:

$$[A_m]_{i,j} = \begin{cases} \binom{i}{j-1} & \text{se } i > j-1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Z_m è una matrice triangolare costruita come il triangolo di Tartaglia ma priva del primo elemento di ogni riga, i suoi elementi sono definiti da:

$$[Z_m]_{i,j} = \begin{cases} \binom{i}{j} & \text{se } i > j-1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

I_m è la matrice unità, l'elemento neutro del prodotto righe per colonne tra matrici quadrate della sua stessa dimensione, i suoi elementi sono definiti da:

$$[I_m]_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

J_m è una matrice diagonale utile per alternare i segni di una matrice[3], i suoi elementi sono definiti da:

$$[J_m]_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{i+1} & \text{se } i = j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

3 http://go.helms-net.de/math/pascal/bernoulli_en.pdf

N_m è una matrice diagonale utile per moltiplicare gli elementi di una riga per il suo indice, i suoi elementi sono definiti da:

$$[N_m]_{i,j} = \begin{cases} i & \text{se } i = j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

2.2.1.1 Corrispondenti matrici a segno alternato

Le matrici ottenute moltiplicando gli elementi di quelle già indicate per $(-1)^{i+j}$ le indicheremo con un segno sopra la lettera in questo modo:

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 \end{pmatrix} \quad \overline{A}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -6 & 6 & 0 \\ 1 & -5 & 10 & -10 & 5 \end{pmatrix}$$

2.2.2 I vettori protagonisti

I vettori di Vandermonde che useremo sono:

$$\overrightarrow{V}(n) = \begin{pmatrix} 1 \\ n \\ n^2 \\ n^3 \\ \dots \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{V'}(n) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2n \\ 3n^2 \\ \dots \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{v}(n) = \begin{pmatrix} n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \\ \dots \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{v'}(n) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2n \\ 3n^2 \\ 4n^3 \\ \dots \end{pmatrix}$$

Esempi considerando 4 componenti:

$$\overrightarrow{V_4}(0)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\quad \overrightarrow{V_4'}(1)=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}\quad \overrightarrow{v_4}(2)=\begin{pmatrix}2\\4\\8\\16\end{pmatrix}\quad \overrightarrow{v_4'}(3)=\begin{pmatrix}1\\6\\27\\108\end{pmatrix}$$

Alcune relazioni tra i vettori introdotti sono: nV(n)=v(n)   nV'(n)=v'(n)
v'(n)=NV(n)

2.2.3 Una funzione particolare chiamata tau

(utilizzata in 2.7)

Indicheremo con "tau" una particolare funzione di due argomenti, che a una matrice quadrata e triangolare X_m (elementi $x_{1,1}...x_{m,m}$) e un vettore $\boldsymbol{Y_m}$ (componenti $y_1...y_m$) , associa una matrice R_m con elementi
$r_{i,j}=x_{i,j}\ w_{\ i-j+1}$ dove il secondo fattore si assume uguale a zero quando l'indice non individua componenti del vettore (quando $i<j+1$).
La matrice risultante può anche essere considerata come il prodotto, elemento per elemento, tra due matrici quadrate, quella del primo argomento e quella triangolare costruita ripetendo il vettore:

$$\tau(\begin{pmatrix}x_{1,1}&0&\cdots&0\\x_{2,1}&x_{2,2}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\x_{n,1}&x_{n,2}&\cdots&x_{n,n}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}y_1x_{1,1}&0&\cdots&0\\y_2x_{2,1}&y_1x_{2,2}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\y_nx_{n,1}&y_{n-1}x_{n,2}&\cdots&y_1x_{n,n}\end{pmatrix}$$

Esempio:

$$\tau(T_4,\overrightarrow{v_4})=\begin{pmatrix}1v_1&0&0&0\\1v_2&1v_1&0&0\\1v_3&2v_2&1v_1&0\\1v_4&3v_3&3v_2&1v_1\end{pmatrix}\qquad \tau(Z_4,\overrightarrow{B_4})=\begin{pmatrix}1B_0&0&0&0\\2B_1&1B_0&0&0\\3B_2&2B_1&1B_0&0\\4B_3&6B_2&4B_1&1B_0\end{pmatrix}$$

2.3 Lo sviluppo delle potenze del binomio

Come è noto il triangolo di Tartaglia fornisce i coefficienti dello sviluppo del binomio di Newton.

Fermandoci ai primi casi possiamo scrivere:

$$\begin{pmatrix} (n+h)^0 \\ (n+h)^1 \\ (n+h)^2 \\ (n+h)^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \binom{0}{0}h^0 & 0 & 0 & 0 \\ \binom{1}{0}h^1 & \binom{1}{1}h^0 & 0 & 0 \\ \binom{2}{0}h^2 & \binom{2}{1}h^1 & \binom{2}{2}h^0 & 0 \\ \binom{3}{0}h^3 & \binom{3}{1}h^2 & \binom{3}{2}h^1 & \binom{3}{2}h^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ n \\ n^2 \\ n^3 \end{pmatrix}$$

più in generale usando la funzione tau possiamo scrivere lo sviluppo del binomio come:

$$\vec{V}(n+h) = \tau(T, \vec{V}(h))\vec{V}(n)$$

in particolare si può vedere che per h=0 risulta:

$$\overrightarrow{V}(n) = \tau(T, \overrightarrow{V}(0))\overrightarrow{V}(n) \qquad \tau(T, \overrightarrow{V}(0)) = I$$

dato che il prodotto lascia invariato il vettore ***V(n)***

Per h=1 invece dato che ***V(1)*** ha tutte componenti uguali a 1, si ottiene:

$$\tau(T, \overrightarrow{V}(1)) = T \qquad T\overrightarrow{V}(n) = \overrightarrow{V}(n+1)$$

Per h=-1 invece dato che ***V(-1)*** ha tutte componenti uguali a *-1*, si ottiene

$$\tau(T, \overrightarrow{V}(-1)) = T^{-1} \qquad T^{-1}\overrightarrow{V}(n) = \overrightarrow{V}(n-1)$$

Le due matrici *T* e T^{-1} sono effettivamente inverse dato che moltiplicate per il vettore di Vandermonde, una incrementa la base di una unità mentre l'altra lo decrementa. T^{-1} è un triangolo di tartaglia a segni alternati come risulta dallo sviluppo di $(n-1)^m$.

Esempio h=1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x+1 \\ (x+1)^2 \\ (x+1)^3 \\ (x+1)^4 \\ (x+1)^5 \end{pmatrix}$$

Questo esempio evidenzia il caso T***V(x)=V(x+1)***.
L'esempio h=-1 relativo allo sviluppo delle potenze di *x-1* evidenzierebbe altrettanto bene che T^{-1}***V(x)=V(x-1)***.

2.3.1 Teorema della base del vettore di Vandermonde

(Utilizzato in 3.3 , 3.4)

Per qualsiasi h intero relativo risulta

$$T^h \vec{V}(n) = \vec{V}(n+h)$$

infatti se *h* è positivo moltiplicando *h* volte per *T* si incrementa la base del vettore di Vandermonde di *h* unità, Se invece *h* è negativo moltiplicando *h* volte per l'inversa di *T* si decrementa la base di *h* unità. Infine se *h=0* si ottiene la matrice unitaria *I* che non varia il vettore.

2.3.2 Identità tau per potenze di T

Per quanto visto sullo sviluppo della potenza del binomio (2.3) e per il precedente teorema risulta:

$$T^h = \tau(T, \vec{V}(h))$$

Questa identità permette di applicare il principio di estensione delle proprietà formali estendendo il significato della potenza ad esponenti razionali, reali ed anche complessi.

2.3.3 Proprietà distributiva e effetto di traslazione del vettore di Vandermonde

Essendo il prodotto righe per colonne distributivo risulta:

$$T_m(V_m(x)+V_m(y)) = T_mV(x)+T_mV(y) = V_m(x+1)+V_m(y+1)$$

Esempi particolari:

$$T_5\begin{pmatrix}1+1\\2+3\\4+9\\8+27\\16+81\end{pmatrix} = T_5(\begin{pmatrix}1\\2\\4\\8\\16\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\3\\9\\27\\81\end{pmatrix}) = T_5\begin{pmatrix}1\\2\\4\\8\\16\end{pmatrix}+T_5\begin{pmatrix}1\\3\\9\\27\\81\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\9\\27\\81\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\4\\16\\64\\256\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+1\\3+4\\9+16\\27+64\\81+256\end{pmatrix}$$

Esempio generico con effetto di traslazione:

$$T^h\sum_{k=0}^{n-1}\vec{V}(k) = \sum_{k=0}^{n-1}T^h\vec{V}(k) = \sum_{k=0}^{n-1}\vec{V}(k+h) = \sum_{k=h}^{h+n-1}\vec{V}(k)$$

2.4 Matrici "tartagliate" e prodotti notevoli

2.4.1 La matrice A e il prodotto AV

Sviluppando le potenze dei binomi fino al sesto esponente :

$$\begin{pmatrix}(n+1)-n\\(n+1)^2-n^2\\(n+1)^3-n^3\\(n+1)^4-n^4\\(n+1)^5-n^5\\(n+1)^6-n^6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\1&2&0&0&0&0\\1&3&3&0&0&0\\1&4&6&4&0&0\\1&5&10&10&5&0\\1&6&15&20&15&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\n\\n^2\\n^3\\n^4\\n^5\end{pmatrix}$$

in forma compatta la stessa relazione si scrive:

$$(n+1)\vec{V}_6(n+1) - n\vec{V}_6(n) = A_6\vec{V}_6(n)$$

e più in generale:

$$A\overrightarrow{V}(n) = (n+1)\overrightarrow{V}(n+1) - n\overrightarrow{V}(n)$$

o equivalentemente usando il vettore **v(n)=**n**V(n)**

$$A\vec{V}(n) = \vec{v}(n+1) - \vec{v}(n)$$

2.4.1.1 La stessa matrice a segni alternati
(utilizzato in 3.2)

Sviluppando come in 2.4.1 le potenze di n-1 si trova

$$\begin{pmatrix} (n-1)-n \\ (n-1)^2-n^2 \\ (n-1)^3-n^3 \\ (n-1)^4-n^4 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 \\ & \dots & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ n \\ n^2 \\ n^3 \\ \dots \end{pmatrix}$$

moltiplicando i due membri di ogni equazione ottenibile per -1 si ha

$$\begin{pmatrix} -(n-1)+n \\ -(n-1)^2+n^2 \\ -(n-1)^3+n^3 \\ -(n-1)^4+n^4 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & -6 & 4 \\ & \dots & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ n \\ n^2 \\ n^3 \\ \dots \end{pmatrix}$$

ossia:

$$\overline{A}\vec{V}(n) = -\vec{v}(n+1) + \vec{v}(n)$$

2.4.2 La matrice Z e il prodotto Zv

$$\begin{pmatrix} (n+1)-1 \\ (n+1)^2-1 \\ (n+1)^3-1 \\ (n+1)^4-1 \\ (n+1)^5-1 \\ (n+1)^6-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & 0 \\ 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \\ n^5 \\ n^6 \end{pmatrix}$$

ossia in forma compatta indicando la matrice con Z_6:

$$(n+1)\vec{V}_6(n+1) - \vec{V}_6(1) = Z_6 n \vec{V}_6(n)$$

Generalizzando, sottintendendo l'indice e ricordando che **v(n)**=n**V(n)**

$$Z\overrightarrow{v(n)} = \overrightarrow{v(n+1)} - \overrightarrow{v(1)}$$

2.4.2.1 La stessa matrice a segni alternati

Sviluppando come in 2.4.2 le potenze di n-1 e togliendo alternativamente 1 o -1 si ha

$$\overline{Z}\overrightarrow{v(n)} = \overrightarrow{v(n-1)} - \overrightarrow{v(-1)}$$

2.4.3 Teorema *Z=ATA⁻¹*

Moltiplicando a destra per *A* i due membri otteniamo

ZA=AT

Moltiplicando ancora per *V(n)* si ottiene

$$ZA\vec{V}(n) = AT\vec{V}(n)$$

per quanto visto in 2.4.1 e 2.4.2 *si ottiene*

$$
\begin{aligned}
&Z((n+1)\vec{V}(n+1) - n\vec{V}(n)) = A\vec{V}(n+1)\\
&Z(n+1)\vec{V}(n+1) - Zn\vec{V}(n) = (n+2)\vec{V}(n+2) - (n+1)\vec{V}(n+1)\\
&(n+2)\vec{V}(n+2) - \vec{V}(1) - ((n+1)\vec{V}(n+1) - \vec{V}(1)) = (n+2)\vec{V}(n+2) - (n+1)\vec{V}(n+1)\\
&(n+2)\vec{V}(n+2) - (n+1)\vec{V}(n+1) = (n+2)\vec{V}(n+2) - (n+1)\vec{V}(n+1)
\end{aligned}
$$

Essendo quest'ultima un' identità lo sono tutte le equazioni precedenti equivalenti, dunque anche il teorema è dimostrato

2.4.3.1 Corollario $A^{-1}Z=TA^{-1}$

Si ottiene moltiplicando i due membri dell'equazione 1.7 per A^{-1}

2.4.3.2 Corollario $A^{-1}Z^h=T^hA^{-1}$

(utilizzato in 3.3.3 , 3.4.1)

Si ottiene applicando più volte il precedente corollario:

$A^{-1}ZZ^{h-1}=TA^{-1}Z^{h-1}=TTA^{-1}Z^{h-2}=T^2A^{-1}Z^{h-2}=...=T^hA^{-1}$

2.4.4 Il teorema $T=N^{-1}ZN$

N^{-1}, inversa di N, è una matrice diagonale con i reciproci degli interi presenti in N. La moltiplicazione a sinistra provoca la moltiplicazione degli elementi della riga i-esima per 1/i.

La moltiplicazione a destra per N invece moltiplica tutti gli elementi della riga j-esima per j stesso. L' effetto risultante è che gli elementi di Z sono moltiplicati per j/i dunque:

$$\binom{i}{j}\frac{j}{i} = \frac{i!}{j!(i-j)!}\frac{j}{i} = \frac{(i-1)!}{(j-1)!(i-j)} = \binom{i-1}{j-1}$$

che esprimono quindi, non più gli elementi della matrice Z ma quelli della matrice *T* (vedi 2.2.1)

2.5 Moltiplicazione per una matrice diagonale

Ricordiamo che una matrice diagonale è una matrice quadrata che ha tutti gli elementi nulli eccetto quelli della diagonale

2.5.1 Moltiplicazione a destra

Questo prodotto, righe per colonne, provoca la moltiplicazione degli elementi delle righe moltiplicate per gli elementi della diagonale

$$\begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \cdots & x_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 x_{1,1} & y_2 x_{1,2} & \cdots & y_n x_{1,n} \\ y_1 x_{2,1} & y_2 x_{2,2} & \cdots & y_n x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1 x_{n,1} & y_2 x_{n,2} & \cdots & y_n x_{n,n} \end{pmatrix}$$

2.5.2 Moltiplicazione a sinistra

Questo prodotto, righe per colonne, provoca la moltiplicazione degli elementi delle colonne moltiplicate per gli elementi della diagonale

$$\begin{pmatrix} y_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \cdots & x_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 x_{1,1} & y_1 x_{1,2} & \cdots & y_1 x_{1,n} \\ y_2 x_{2,1} & y_2 x_{2,2} & \cdots & y_2 x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n x_{n,1} & y_n x_{n,2} & \cdots & y_n x_{n,n} \end{pmatrix}$$

2.5.3 Moltiplicazione a sinistra e a destra

Se dopo aver moltiplicato a sinistra moltiplichiamo anche a destra, si ottiene:

$$\begin{pmatrix} y_1 x_{1,1} & y_1 x_{1,2} & \cdots & y_1 x_{1,n} \\ y_2 x_{2,1} & y_2 x_{2,2} & \cdots & y_2 x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n x_{n,1} & y_n x_{n,2} & \cdots & y_n x_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 x_{1,1} y_1 & y_1 x_{1,2} y_2 & \cdots & y_1 x_{1,n} y_n \\ y_2 x_{2,1} y_1 & y_2 x_{2,2} y_2 & \cdots & y_2 x_{2,n} y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n x_{n,1} y_1 & y_n x_{n,2} y_2 & \cdots & y_n x_{n,n} y_n \end{pmatrix}$$

2.6 Matrici a segni alternati

Si può utilizzare il vettore ***J*** per alternare i segni di una matrice quadrata *X*.
JX cambia segno alle righe pari mentre *XJ* cambia segno alle colonne pari. La doppia azione *JXJ* cambia segno agli elementi che hanno dispari la somma degli indici di riga e colonna

$$T^{-1} = J_4 T_4 J_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad J_4 A_4 J_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

2.6.1 Relazione di alternanza tra matrici quadrate

Diremo che due matrici quadrate *X* e *Y* con le stesse dimensioni sono in relazione di alternanza se *X*=*JYJ*. Essendo *JJ*=*I* basta moltiplicare i due membri, a destra e a sinistra per *J* per ottenere anche, reciprocamente, ***Y***=*J**X**J*.

Dalla definizione precedente, tenendo conto della definizione della matrice J (vedi 2.2) discende che gli elementi corrispondenti di due matrici in relazione di alternanza si ottengono gli uni dagli altri moltiplicando per $(-1)^{i+j}$ dove i (da 1 a *m*) e j (da 1 a *m*) sono rispettivamente gli indici di riga e di colonna degli elementi corrispondenti considerati
Dunque due matrici in relazione di alternanza hanno gli stessi elementi con somma di indici, di riga e di colonna, pari. Opposti gli altri.

2.6.2 alternanza tra vettori

Diremo che due vettori ***X*** e ***Y*** con le stesse dimensioni sono in relazione di alternanza se *X*=***J****Y*. Essendo ***JJ***=***I*** basta moltiplicare i due membri, a sinistra per ***J*** per ottenere anche, reciprocamente, ***Y***=***JX***.
Dalla definizione precedente, tenendo conto della definizione della matrice J (vedi 2.2) discende che gli elementi corrispondenti di due vettori in relazione di alternanza si ottengono gli uni dagli altri moltiplicando per $(-1)^{i+1}$ dove i (da 1 a *m*) è l indici delle componenti degli elementi corrispondenti considerati.
Dunque due vettori in relazione di alternanza hanno gli stessi elementi con indice dispari. Opposti gli altri.

2.6.3 Invarianza del determinante

Matrici in relazione di alternanza hanno lo stesso determinante
Infatti per la nota proprietà del determinante di un prodotto, det (X)= det(J)det(X)det(J) =det(J) in quanto det (J) è 1 quando le componenti sono pari -1 quando sono dispari ma al quadrato è sempre 1.

2.6.3.1 Dimostrazione senza det(XY)=det(X)det(Y)

Infatti se si considera il determinante di una matrice di ordine n espresso come somma di n! addendi, ognuno composto da n fattori con gli indici di riga fissi e quelli di colonna permutati in tutti i modi possibili, si vede che questi addendi rimangono invariati se si passa alla matrice alternata. Difatti la somma degli indici di riga 1,2,3,...n è $n(n+1)/2$ uguale alla somma degli indici delle colonne $p_1, p_2, p_3,..p_n$ per qualunque permutazione data la commutatività della somma. La somma totale degli indici è dunque il doppio di quella dei soli indici di riga, $n(n+1)$, numero pari per qualsiasi valore di n (intero positivo).

Pertanto ognuno degli n! addendi composto da n fattori deve dare un numero pari nella totale sommatoria degli indici. In ogni addendo i fattori che cambiano segno passando da una matrice a una sua alternata sono quelli che hanno l'indice di riga più quello di colonna uguale a un numero dispari. Questi però, per ogni addendo, devono necessariamente essere in numero pari. Infatti se così non fosse la sommatoria parziale degli indici di riga e colonna relativa ai fattori che cambiano segno sarebbe dispari come il totale complessivo ottenuto aggiungendo le somme degli indici, tutte pari, relativi ai fattori che non cambiano segno, cosa che, come mostrato, è impossibile. Allora se in ognuno degli n! addendi cambiano segno un numero necessariamente pari di fattori l'addendo rimane invariato. Per questo il determinante di una matrice coincide con quello della sua alternata.

Esempio n=3:

$$
\begin{aligned}
&a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} + \\
&+a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + \\
&+a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} + a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} = \\
&= a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,1}(-a_{2,3})(-a_{3,2}) + \\
&+(-a_{1,2})(-a_{2,1})a_{3,3} + (-a_{1,2})(-a_{2,3})a_{3,1} + \\
&+a_{1,3}(-a_{2,1})(-a_{3,2}) + a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}
\end{aligned}
$$

2.6.4 Le inverse mantengono la relazione

Le inverse di due matrici in relazione di alternanza sono tra loro in relazione di alternanza (applicato in 4.3)
Infatti, ricordando $JJ=I$, come X e JXJ sono in relazione di alternanza , anche X^{-1} e $(JXJ)^{-1}=(J)^{-1}(X)^{-1}(J)^{-1}=JX^{-1}J$ *lo* sono.

2.6.5 Le potenze mantengono la relazione

Le potenze di due matrici in relazione di alternanza sono, tra loro, nella stessa relazione

Infatti, ricordando *JJ=I,* come X e JXJ sono in relazione di alternanza, anche X^h e $(JXJ)^h=(JXJ)(JXJ)...(JXJ)^-$ $=JXIXI...IXJ==JXX..XJ=JX^hJ$ sono in relazione di alternanza

2.6.6 I prodotti mantengono la relazione

(applicato in 3.5.2)
Se due matrici (quadrate) X e Y sono in relazione di alternanza rispettivamente con JXJ e JYJ il loro prodotto e quello delle loro alternate sono nella stessa relazione.
Infatti JXJJYJ=JXIYJ=JXYJ

2.6.7 Relazione di alternanza tra potenze di T

(applicato 3.5.3)
Dallo sviluppo del binomio di newton, confrontando i casi h=1 e h=-1 come mostrato in 2.3 si deduce che la matrice di Tartaglia completa è in relazione di alternanza con la sua inversa cioè:

$$T^{-1} = \overline{T} \quad ossia \quad T^{-1} = JTJ$$

Per 2.6.5 anche le rispettive potenze T^h e $(T^h)^{-1}=T^{-h}$ sono nella stessa relazione di alternanza

$$T^{-n} = JT^nJ \quad ossia \quad T^{-n} = \overline{T}^n$$

2.6.8 Vettori trasformati mantengono la relazione

Quando due vettori in relazione di alternanza sono trasformati in matrici ripetendoli a partire dalla diagonale principale, come nella definizione della funzione tau, le matrici così ottenute sono in relazione di alternanza.
Sia $\mathbf{w_n}$ un vettore di componenti $w_0\ w_1\ w_2\ ...w_{n-1}$ e siano W_n la corrispondente matrice i cui elementi sono definiti nel seguente modo:

$$[W]_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{se } j > i \\ w_{i-j} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Considerando J**w**, alternato di **w**, dato che gli indici partono da zero cambieranno segno solo gli elementi con indice dispari.
Considerando JWJ abbiamo un cambio di segno negli elementi con

somma di indici, di riga e di colonna, dispari dato che:

$$J[W]_{i,j}J = \begin{cases} 0 & \text{se } j > i \\ (-1)^{i+j} w_{i-j} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La tesi è conseguenza del fatto che per valori interi i+j e i-j devono essere per forza entrambi pari o entrambi dispari. Infatti se la somma è pari cioè i+j=2k e quindi i=2k-j allora la differenza è i-j=(2k-j)-j=2k-2j=2(k-j) perciò pari e viceversa
se è pari la sottrazione i-j=2k e quindi i=2k+j allora
la somma è i+j=(2k+j)+j=2k+2j=2(k+j) perciò pari

Esempio JW_6J

$$J\begin{pmatrix} w_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ w_1 & w_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ w_2 & w_1 & w_0 & 0 & 0 & 0 \\ w_3 & w_2 & w_1 & w_0 & 0 & 0 \\ w_4 & w_3 & w_2 & w_1 & w_0 & 0 \\ w_5 & w_4 & w_3 & w_2 & w_1 & w_0 \end{pmatrix} J = \begin{pmatrix} w_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -w_1 & w_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ w_2 & -w_1 & w_0 & 0 & 0 & 0 \\ -w_3 & w_2 & -w_1 & w_0 & 0 & 0 \\ w_4 & -w_3 & w_2 & -w_1 & w_0 & 0 \\ -w_5 & w_4 & -w_3 & w_2 & -w_1 & w_0 \end{pmatrix}$$

2.7 Proprietà della funzione tau
La funzione tau è definita in 2.2.3

2.7.1 La funzione tau mantiene la relazione
(utilizzato in 4.3)
Con una stessa matrice e due vettori in relazione di alternanza la funzione tau dà risultati in relazione di alternanza.

$$\tau(X, J\vec{y}) = J\tau(X, \vec{y})J$$

Infatti ricordando quanto visto in 2.6.8, quando si moltiplica la matrice X, con la matrice JYJ ottenuta o dal vettore J**y**, alternato di y, o equivalentemente dalla matrice Y, ottenuta da **y**, il fattore $(-1)^{i+j}$ passa al risultato della funzione giustificando la tesi.

2.7.2 Spostamento del fattore sinistro
Se D è una qualsiasi matrice diagonale per la commutatività della ordinaria moltiplicazione numerica risulta

$$\boxed{D\tau(X,\vec{Y}) = \tau(DX,\vec{Y})}$$

2.7.3 Spostamento del fattore destro
Se D è una qualsiasi matrice diagonale per la commutatività della ordinaria moltiplicazione numerica risulta

$$\boxed{\tau(X,\vec{Y})D = \tau(XD,\vec{Y})}$$

2.7.4 Teorema T tau

Dall'identità T tau (2.3.1) moltiplicando per T^n si ricava facilmente che

$$\boxed{T^n\tau(T,\overrightarrow{V(h)}) = \tau(T,\overrightarrow{V(h+n)})}$$

2.7.5 Teorema NZ tau
dimostriamo che:

$$\boxed{T^n\tau(NZ,\overrightarrow{V(h)}) = \tau(NZ,\overrightarrow{V(h+n)})}$$

Infatti ricordando che che $N^{-1}N=I$ *,* la proprietà dello spostamento del fattore destro (vedi 2.6.2) *e* che $T=N^{-1}ZN$ (vedi 2.4.4)

$$\boxed{T^n\tau(NZ,\overrightarrow{V(h)}) = T^n\tau(NZ,\overrightarrow{V(h)})N^{-1}N = T^n\tau(NZN^{-1},\overrightarrow{V(h)})N =}$$

per il precedente teorema (vedi 2.6.3)

$$\boxed{= T^n\tau(T,\overrightarrow{V(h)})N = \tau(T,\overrightarrow{V(h+n)})N =}$$

infine applicando nuovamente l'identità 2.4.4 e la 2.6.2 si dimostra la tesi:

$$= \tau(NZN^{-1}, \overrightarrow{V}(h+n))N = \tau(NZ, \overrightarrow{V}(h+n))$$

2.7.6 Principio tau di sostituzione
Abbiamo visto che T^h incrementa **V(n)** sia direttamente sia all'interno della funzione tau. Siccome in ciò la particolare definizione del vettore in oggetto non gioca alcun ruolo qualunque altro vettore ugualmente incrementato dalla potenza di T come B(n) o S(n) faranno la stessa cosa all'interno della funzione tau.
In particolare essendo T^h**B(n)** =**B(n+h)** saranno valide le seguenti:

2.7.6.1 Teorema T tau con B(n)

$$T^h \tau(T, \overrightarrow{B}(n)) = \tau(T, T^h \overrightarrow{B}(n)) = \tau(T, \overrightarrow{B}(n+h))$$

analogamente a

$$T^h \tau(T, \overrightarrow{V}(n)) = \tau(T, T^h \overrightarrow{V}(n)) = \tau(T, \overrightarrow{V}(n+h))$$

2.7.6.2 Teorema NZ tau con B(n)

$$T^h \tau(NZ, \overrightarrow{B}(n)) = \tau(NZ, T^h \overrightarrow{B}(n)) = \tau(NZ, \overrightarrow{B}(n+h))$$

analogamente a

$$T^h \tau(NZ, \overrightarrow{V}(n)) = \tau(NZ, T^h \overrightarrow{V}(n)) = \tau(NZ, \overrightarrow{V}(n+h))$$

3.0 Teoremi senza sequenze bernoulliane

Saranno dimostrati teoremi che forniscono i coefficienti dei polinomi per il calcolo delle somme di potenze di interi successivi, inizianti da un qualsiasi intero relativo, senza far uso né dei numeri di Bernoulli né di funzioni generatrici con le relative serie infinite di potenze.

3.1 Teorema della matrice A (già "1A")
Per determinare i coefficienti dei polinomi per il calcolo di somme di potenze di *n* interi successivi da *0* a *n-1* dimostrando che

$$\overrightarrow{S}(n) = A^{-1} \overrightarrow{v}(n)$$

Per le definizioni dei vettori e della matrice vedi 2.2 L'equazione va intesa per ogni m intero positivo. Ricordiamo, specificando l'indice m che in seguito sarà sottinteso, che

$$\vec{S}_m(n) = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n-1} k^0 \\ \sum_{k=0}^{n-1} k^1 \\ \sum_{k=0}^{n-1} k^2 \\ \dots \\ \sum_{k=0}^{n-1} k^{m-1} \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{n-1} \vec{V}_m(k)$$

Moltiplicando a sinistra per A i due membri dell'equazione da dimostrare si ottiene:

$$A\vec{S}(n) = \vec{v}(n)$$

ossia

$$A\sum_{k=0}^{n-1} \vec{V}(k) = \vec{v}(n)$$

Per la proprietà distributiva:

$$\sum_{k=0}^{n-1} A\vec{V}(k) = \vec{v}(n)$$

per quanto visto in 2.4.1

$$\sum_{k=0}^{n-1} (\vec{v}(k+1) - \vec{v}(k)) = \vec{v}(n)$$

Associando in due sommatorie:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \vec{v}(k+1) - \sum_{k=0}^{n-1} \vec{v}(k) = \vec{v}(n)$$

Esprimendo in modo equivalente:

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{v}(k) - \sum_{k=0}^{n-1} \vec{v}(k) = \vec{v}(n)$$

Le due sommatorie hanno in comune n-1 addendi per cui nella sottrazione si semplificano quasi tutti i termini (effetto “telescopico”) tranne l’ultimo addendo della prima sommatoria e il primo della seconda che però è il vettore nullo:

$$\vec{v}(n) + \sum_{k=1}^{n-1} \vec{v}(k) - \vec{v}(0) - \sum_{k=1}^{n-1} \vec{v}(k) = \vec{v}(n)$$
$$\vec{v}(n) = \vec{v}(n)$$

L’ultima palese identità dimostra che sono tali anche tutte le altre equazioni equivalenti e quindi l’equazione che dovevamo dimostrare essere sempre vera.

3.1.1 Esempio con m=7

(utilizzato in 4.1)

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n-1} k^0 \\ \sum_{k=0}^{n-1} k^1 \\ \sum_{k=0}^{n-1} k^2 \\ \sum_{k=0}^{n-1} k^3 \\ \sum_{k=0}^{n-1} k^4 \\ \sum_{k=0}^{n-1} k^5 \\ \sum_{k=0}^{n-1} k^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 0 \\ 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \\ n^5 \\ n^6 \\ n^7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n-1} k^0 \\ \sum_{k=0}^{n-1} k^1 \\ \sum_{k=0}^{n-1} k^2 \\ \sum_{k=0}^{n-1} k^3 \\ \sum_{k=0}^{n-1} k^4 \\ \sum_{k=0}^{n-1} k^5 \\ \sum_{k=0}^{n-1} k^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{30} & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{12} & 0 & \frac{5}{12} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{42} & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \\ n^5 \\ n^6 \\ n^7 \end{pmatrix}$$

in forma equivalente:

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^0 = n$$
$$\sum_{i=0}^{n-1} i^1 = -\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2$$
$$\sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{1}{6}n - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3$$
$$\sum_{i=0}^{n-1} i^3 = \frac{1}{4}n^2 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^4$$
$$\sum_{i=0}^{n-1} i^4 = -\frac{1}{30}n + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{5}n^5$$
$$\sum_{i=0}^{n-1} i^5 = -\frac{1}{12}n^2 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{2}n^5 + \frac{1}{6}n^6$$
$$\sum_{i=0}^{n-1} i^6 = \frac{1}{42}n - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{7}n^7$$

oppure

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^0 = n$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^1 = \frac{-n+n^2}{2}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{n-3n^2+2n^3}{6}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^3 = \frac{n^2-2n^3+n^4}{4}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^4 = \frac{-n+10n^3-15n^3+6n^5}{30}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^5 = \frac{-n^2+5n^4-6n^5+2n^6}{12}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^6 = \frac{n-7n^3+21n^5-21n^6+6n^7}{42}$$

La sequenza dei denominatori 1,2,6,4,30,12,42,24,90,20, 66,24…

(A064538) è comune a tutti i casi successivi.

3.2 Teorema della matrice A segnata (già “1B”)

Per determinare i coefficienti dei polinomi per il calcolo di somme di potenze di *n* interi successivi da *1* a *n* si dimostrando che:

$$_1\vec{S}(n) = \overline{A}^{-1}\vec{v}(n)$$

Per le definizioni dei vettori e della matrice vedi 2.2 L’equazione va intesa per ogni m intero positivo. Specificando l’indice m che in seguito sarà sottinteso, ricordiamo che che

$$_1\vec{S}_m(n) = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} k^0 \\ \sum_{k=1}^{n} k^1 \\ \sum_{k=1}^{n} k^2 \\ \dots \\ \sum_{k=1}^{n} k^{m-1} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \vec{V}_m(k)$$

Moltiplicando a sinistra per A i due membri dell’equazione da dimostrare sempre vera si ottiene:

$$\overline{A}_1 \vec{S}(n) = \vec{v}(n)$$

ossia

$$\overline{A} \sum_{k=1}^{n} \vec{V}(k) = \vec{v}(n)$$

Per la proprietà distributiva:

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{A} \vec{V}(k) = \vec{v}(n)$$

per quanto visto in 2.4.1.1

$$\sum_{k=1}^{n} (-\vec{v}(k-1) + \vec{v}(k)) = \vec{v}(n)$$

Associando in due sommatorie:

$$-\sum_{k=1}^{n} \vec{v}(k-1) + \sum_{k=1}^{n} \vec{v}(k) = \vec{v}(n)$$

Esprimendo in modo equivalente:

$$-\sum_{k=0}^{n-1} \vec{v}(k) - \sum_{k=1}^{n} \vec{v}(k) = \vec{v}(n)$$

Le due sommatorie hanno in comune n-1 addendi per cui nella sottrazione si semplificano quasi tutti i termini (effetto “telescopico”) tranne il primo addendo della prima sommatoria e l’ultimo della seconda che però è il vettore nullo:

$$-\vec{v}(0) - \sum_{k=1}^{n-1} \vec{v}(k) + \vec{v}(n) + \sum_{k=1}^{n-1} \vec{v}(k) = \vec{v}(n)$$

$$\vec{v}(n) = \vec{v}(n)$$

L’ultima palese identità dimostra che sono tali anche tutte le altre equazioni equivalenti e quindi l’equazione che dovevamo dimostrare essere sempre vera.

3.2.1 Esempio con m=11

(utilizzato in 4.1.3)
Calcolando l’inversa della matrice in relazione di alternanza con A si ottiene una matrice triangolare uguale alla precedente (3.1.1) ma con gli elementi della diagonale immediatamente sotto la principale cambiati di segno:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} i^0 \\ \sum_{i=1}^{n} i^1 \\ \sum_{i=1}^{n} i^2 \\ \sum_{i=1}^{n} i^3 \\ \sum_{i=1}^{n} i^4 \\ \sum_{i=1}^{n} i^5 \\ \sum_{i=1}^{n} i^6 \\ \sum_{i=1}^{n} i^7 \\ \sum_{i=1}^{n} i^8 \\ \sum_{i=1}^{n} i^9 \\ \sum_{i=1}^{n} i^{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{30} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{12} & 0 & \frac{5}{12} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{42} & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & 0 & -\frac{7}{24} & 0 & \frac{7}{12} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{30} & 0 & \frac{2}{9} & 0 & -\frac{7}{15} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{20} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{7}{10} & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{5}{66} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{11} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \\ n^5 \\ n^6 \\ n^7 \\ n^8 \\ n^9 \\ n^{10} \\ n^{11} \end{pmatrix}$$

e in forma equivalente:

$$\sum_{i=1}^{n} i^0 = n$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^1 = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^4$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = -\frac{1}{30}n + \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{5}n^5$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^5 = -\frac{1}{12}n^2 + \frac{5}{12}n^4 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{1}{6}n^6$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^6 = \frac{1}{42}n - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{7}n^7$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^7 = \frac{1}{12}n^2 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{7}{12}n^6 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{1}{8}n^8$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^8 = -\frac{1}{30}n + \frac{2}{9}n^3 - \frac{7}{15}n^4 + \frac{2}{3}n^6 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{1}{9}n^9$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^9 = -\frac{3}{20}n^2 + \frac{1}{2}n^4 - \frac{7}{10}n^6 + \frac{3}{4}n^8 + \frac{1}{2}n^9 + \frac{1}{10}n^{10}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^{10} = \frac{5}{66}n - \frac{1}{2}n^3 + n^5 - n^7 + \frac{5}{6}n^9 + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{1}{11}n^{11}$$

Questi sono i polinomi che furono pubblicati nel libro Ars Conjectandi di Jacob Bernoulli nel 1713 pochi anni dopo la morte dell’autore.

Con con un minimo comun denominatore si ottiene:

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n^2+n}{2}$$
$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$$
$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^4+2n^3+n^2}{4}$$
$$1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4=\frac{6n^5+15n^4+10n^3-n}{30}$$
$$1^5+2^5+3^5+\cdots+n^5=\frac{2n^6+6n^5+5n^4-n^2}{12}$$
$$1^6+2^6+3^6+\cdots+n^6=\frac{6n^7+21n^6+21n^5-7n^3+n}{42}$$
$$1^7+2^7+3^7+\cdots+n^7=\frac{3n^8+12n^7+14n^6-7n^4+2n^2}{24}$$
$$1^8+2^8+3^8+\cdots+n^8=\frac{10n^9+45n^8+60n^7-42n^5+20n^3-3n}{90}$$
$$1^9+2^9+3^9+\cdots+n^9=\frac{2n^{10}+10n^9+15n^8-14n^6+10n^4-3n^2}{20}$$
$$1^{10}+2^{10}+3^{10}+\cdots+n^{10}=\frac{6n^{11}+33n^{10}+55n^9-66n^7+66n^5-33n^3+5n}{66}$$
$$1^{11}+2^{11}+3^{11}+\cdots+n^{11}=\frac{2n^{12}+12n^{11}+22n^{10}-33n^8+44n^6-33n^4+10n^2}{24}$$

La sequenza dei denominatori 1,2,6,4,30,12,42,24,90,20, 66,24…

(A064538) è comune a tutti i casi che vedremo.

3.3 Teorema dell' inizio variabile

(utilizzato in 3.4)

Per la determinazione di un polinomio per il calcolo delle somme di potenze di n interi successivi inizianti da h

Dato n e m interi positivi,

h numero intero relativo,

si considera la seguente somma di potenze di interi successivi:

$$\sum_{k=h}^{h+n-1} k^{m-1}=h^{m-1}+(h+1)^{m-1}+\cdots+(h+n-1)^{m-1}$$

e si dimostra che ad essa corrisponde un polinomio in funzione di n di grado *m* determinato dalla seguente uguaglianza:

$${}_h\vec{S}(n)=T^h A^{-1}\vec{v}(n)$$

dove, ricordiamo, il vettore a primo membro è:

$$ {}_h\vec{S}_m(n) = \begin{pmatrix} \sum_{k=h}^{h+n-1} k^0 \\ \sum_{k=h}^{h+n-1} k^1 \\ \sum_{k=h}^{h+n-1} k^2 \\ \cdots \\ \sum_{k=h}^{h+n-1} k^{m-1} \end{pmatrix} = \sum_{k=h}^{h+n-1} \vec{V}_m(k) $$

Sottintenderemo h quando uguale a zero e anche il generico l'indice m, indicante il numero di righe delle matrici e dei vettori. Da notare che in questo contesto si assegna valore 1 alla forma indeterminata 0^0

Abbiamo già dimostrato in 3.1 che

$$ \sum_{k=0}^{n-1} \vec{V}(k) = A^{-1}\vec{v}(n) $$

moltiplicando i due membri per T^h:

$$ T^h \sum_{k=0}^{n-1} \vec{V}(k) = T^h A^{-1}\vec{v}(n) $$

distribuendo:

$$ \sum_{k=0}^{n-1} T^h \vec{V}(k) = T^h A^{-1}\vec{v}(n) $$

per il teorema della base visto in 2.3.1

$$ \sum_{k=0}^{n-1} \vec{V}(h+k) = T^h A^{-1}\vec{v}(n) $$

ossia:

$$\sum_{k=h}^{h+n-1} \vec{V}(k) = T^h A^{-1} \vec{v}(n)$$

come dovevamo dimostrare.

3.3.1 **Esempio h=-9 m=6**

Calcolando $T^{-9}A^{-1}$:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=-9}^{n-10} i^0 \\ \sum_{i=-9}^{n-10} i^1 \\ \sum_{i=-9}^{n-10} i^2 \\ \sum_{i=-9}^{n-10} i^3 \\ \sum_{i=-9}^{n-10} i^4 \\ \sum_{i=-9}^{n-10} i^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{19}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{541}{6} & -\frac{19}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -855 & \frac{541}{4} & -\frac{19}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{242999}{30} & -1710 & \frac{541}{3} & -\frac{19}{2} & \frac{1}{5} & 0 \\ -76665 & \frac{242999}{12} & -2850 & \frac{2705}{12} & -\frac{19}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \\ n^5 \\ n^6 \end{pmatrix}$$

e in forma equivalente:

$$\sum_{i=-9}^{n-10} i^0 = n$$

$$\sum_{i=-9}^{n-10} i^1 = -\frac{19}{2}n + \frac{1}{2}n^2$$

$$\sum_{i=-9}^{n-10} i^2 = \frac{541}{6}n - \frac{19}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3$$

$$\sum_{i=-9}^{n-10} i^3 = -855n - \frac{541}{4}n^2 - \frac{19}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^4$$

$$\sum_{i=-9}^{n-10} i^4 = \frac{242999}{30}n - 1710n^2 + \frac{541}{3}n^3 - \frac{19}{2}n^4 + \frac{1}{5}n^5$$

$$\sum_{i=-9}^{n-10} i^5 = -76665n + \frac{242999}{12}n^2 - 2850n^3 + \frac{2705}{12}n^4 - \frac{19}{2}n^5 + \frac{1}{6}n^6$$

oppure

$$\sum_{i=-9}^{n-10} i^0 = n$$
$$\sum_{i=-9}^{n-10} i^1 = \frac{-19n + n^2}{2}$$
$$\sum_{i=-9}^{n-10} i^2 = \frac{541n - 57n^2 + 2n^3}{6}$$
$$\sum_{i=-9}^{n-10} i^3 = \frac{-3420n + 541n^2 - 38n^3 + n^4}{4}$$
$$\sum_{i=-9}^{n-10} i^4 = \frac{222999n - 51300n^2 + 5410n^3 - 285n^4 + 6n^5}{30}$$
$$\sum_{i=-9}^{n-10} i^5 = \frac{-919980n + 242999n^2 - 34200n^3 + 2705n^4 - 114n^5 + 2n^6}{12}$$

3.3.2 Esempio h=10 m=6

Calcolando $T^{10}A^{-1}$:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=10}^{n+9} i^0 \\ \sum_{i=10}^{n+9} i^1 \\ \sum_{i=10}^{n+9} i^2 \\ \sum_{i=10}^{n+9} i^3 \\ \sum_{i=10}^{n+9} i^4 \\ \sum_{i=10}^{n+9} i^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{19}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{541}{6} & \frac{19}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 855 & \frac{541}{4} & \frac{19}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{242999}{30} & 1710 & \frac{541}{3} & \frac{19}{2} & \frac{1}{5} & 0 \\ 76665 & \frac{242999}{12} & 2850 & \frac{2705}{12} & \frac{19}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \\ n^5 \\ n^6 \end{pmatrix}$$

e in forme equivalenti:

$$\sum_{i=10}^{n+9} i^0 = n$$
$$\sum_{i=10}^{n+9} i^1 = \frac{19}{2}n + \frac{1}{2}n^2$$
$$\sum_{i=10}^{n+9} i^2 = \frac{541}{6}n + \frac{19}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3$$
$$\sum_{i=10}^{n+9} i^3 = 855n + \frac{541}{4}n^2 + \frac{19}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^4$$
$$\sum_{i=10}^{n+9} i^4 = \frac{242999}{30}n + 1710n^2 + \frac{541}{3}n^3 + \frac{19}{2}n^4 + \frac{1}{5}n^5$$
$$\sum_{i=10}^{n+9} i^5 = 76665n + \frac{242999}{12}n^2 + 2850n^3 + \frac{2705}{12}n^4 + \frac{19}{2}n^5 + \frac{1}{6}n^6$$

$$\sum_{i=10}^{n+9} i^0 = n$$
$$\sum_{i=10}^{n+9} i^1 = \frac{19n + n^2}{2}$$
$$\sum_{i=10}^{n+9} i^2 = \frac{541n + 57n^2 + 2n^3}{6}$$
$$\sum_{i=10}^{n+9} i^3 = \frac{3420n + 541n^2 + 38n^3 + n^4}{4}$$
$$\sum_{i=10}^{n+9} i^4 = \frac{222999n + 51300n^2 + 5410n^3 + 285n^4 + 6n^5}{30}$$
$$\sum_{i=10}^{n+9} i^5 = \frac{919980n + 242999n^2 + 34200n^3 + 2705n^4 + 114n^5 + 2n^6}{12}$$

(vedi 3.5.3. per la relazione tra i coefficienti dei due esempi proposti)

3,3,3 Sommatorie a inizio variabile espresse come differenza di inizi zero.

(Utilizzato in 4.6.6)

Risulta:

$$\sum_{k=h}^{h+n-1} k^m = \sum_{k=0}^{h+n-1} k^m - \sum_{k=0}^{h-1} k^m$$

da cui

$$\sum_{k=h}^{h+n-1} k^m = S_m(h+n) - S_m(h)$$

in modo equivalente per gli interi ma estendibile anche a valori razionali , reali e perfino complessi:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (h+k)^m = S_m(h+n) - S_m(h)$$

3.3.3.1 Conseguenze

$$T^h A^{-1} \vec{v}(n) = A^{-1}\vec{v}(n+h) - A^{-1}\vec{v}(h)$$

Per l'identità in 2.4.3.2….

$$A^{-1} Z^h \vec{v}(n) = A^{-1}\vec{v}(n+h) - A^{-1}\vec{v}(h)$$

semplificando si ottiene:

$$Z^h \vec{v}(n) = \vec{v}(n+h) - \vec{v}(h)$$

3.4 Teorema dei due polinomi

Per la determinazione di due polinomi, di cui uno di primo grado, il cui prodotto calcola somme di potenze di n+t interi successivi iniziando da h.
Dato n intero positivo,
m intero non negativo,
h numero intero relativo,
t numero intero tale che n+t+h-1>0
si considera la seguente somma di potenze di interi successivi:

$$\sum_{k=h}^{t+h+n-1} k^{m-1} = (t+h)^{m-1} + (t+h+1)^{m-1} + \cdots + (t+h+n-1)^{m-1}$$

e si dimostra che ad essa corrisponde un polinomio in funzione di n di grado *m* determinato dalla seguente equazione:

$$ {}_h^t\vec{S}_m(n) = (n+t)T_m^h A_m^{-1} T_m^t \vec{V}_m(n)$$

dove, ricordiamo, il vettore a primo membro è:

$$ {}_h^t\vec{S}_m(n) = \begin{pmatrix} \sum_{k=h}^{n+t+h-1} k^0 \\ \sum_{k=h}^{n+t+h-1} k^1 \\ \sum_{k=h}^{n+t+h-1} k^2 \\ \cdots \\ \sum_{k=h}^{n+t+h-1} k^{m-1} \end{pmatrix} = \sum_{k=h}^{n+t+h-1} \vec{V}(k)$$

Sottintenderemo gli indici t e h quando uguali a zero e anche il generico l'indice m. indicante il numero di righe delle matrici e dei vettori dell'equazione. Da
notare che in questo contesto si assegna valore 1 alla forma indeterminata 0^0
Essendo:

$$\vec{v}(n) = n\vec{V}(n)$$

per quanto già dimostrato in 3.3 si ha che:

$$ {}_h\vec{S}(n) = T^h A^{-1} n\vec{V}(n) $$

e quindi anche

$$ {}_h\vec{S}(n) = nT^h A^{-1}\vec{V}(n) $$

sostituendo n con n+t otteniamo:

$$ {}_h\vec{S}(n+t) = (n+t)T^h A^{-1}\vec{V}(n+t) $$

E quindi tenendo conto del teorema della base visto in 2.3.2 otteniamo la nostra tesi:

$$ {}_h^t\vec{S}(n) = (n+t)T^h A^{-1} T^t \vec{V}(n) $$

3.4.1 Alternativa con Z

Infine tenendo conto di 2.4.3.2 risulta anche

$$ {}_h^t\vec{S}(n) = (n+t)A^{-1} Z^h T^t \vec{V}(n) $$

3.4.2 Esempio con m=4 h=3 t=2:

$$ \begin{pmatrix} \sum_{k=3}^{n+4} k^0 \\ \sum_{k=3}^{n+4} k^1 \\ \sum_{k=3}^{n+4} k^2 \\ \sum_{k=3}^{n+4} k^3 \end{pmatrix} = (n+2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ n \\ n^2 \\ n^3 \end{pmatrix} $$

o con la variante enunciata:

$$ \begin{pmatrix} \sum_{k=3}^{n+4} k^0 \\ \sum_{k=3}^{n+4} k^1 \\ \sum_{k=3}^{n+4} k^2 \\ \sum_{k=3}^{n+4} k^3 \end{pmatrix} = (n+2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ n \\ n^2 \\ n^3 \end{pmatrix} $$

calcolando, in entrambi i casi, si ottiene:

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=3}^{n+4} k^0 \\ \sum_{k=3}^{n+4} k^1 \\ \sum_{k=3}^{n+4} k^2 \\ \sum_{k=3}^{n+4} k^3 \end{pmatrix} = (n+2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{25}{2} & \frac{23}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{91}{2} & \frac{89}{4} & 4 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ n \\ n^2 \\ n^3 \end{pmatrix}$$

equivalente a

$$\sum_{k=3}^{n+4} k^0 = n+2$$

$$\sum_{k=3}^{n+4} k^1 = \frac{(n+2)(n+7)}{2}$$

$$\sum_{k=3}^{n+4} k^2 = \frac{(n+2)(2n^2+23n+75)}{6}$$

$$\sum_{k=3}^{n+4} k^3 = \frac{(n+2)(n^3+16n^2+89n+182)}{4}$$

3.4.3. Esempio h=1 t=1 m=6

Calcolando $TA^{-1}T$ *(*oppure $A^{-1}ZT$*)* (matrici 6x6) si ottiene:

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n+1} k^0 \\ \sum_{k=1}^{n+1} k^1 \\ \sum_{k=1}^{n+1} k^2 \\ \sum_{k=1}^{n+1} k^3 \\ \sum_{k=1}^{n+1} k^4 \\ \sum_{k=1}^{n+1} k^5 \end{pmatrix} = (n+1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{7}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{89}{30} & \frac{91}{30} & \frac{13}{10} & \frac{1}{5} & 0 \\ 1 & 4 & \frac{49}{12} & \frac{71}{12} & \frac{4}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \\ n^5 \end{pmatrix}$$

equivalentemente:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^0 = n+1$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(6+7n+2n^2)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)(4+8n++5n^2+n^3)}{4}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^4 = \frac{(n+1)(30+89n+91n^2+39n^3+6n^4)}{30}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^5 = \frac{(n+1)(12+48n+71n^2+49n^3+16n^4+2n^5)}{12}$$

3.5 Coppie di matrici e di vettori in relazione di alternanza

Viene spiegato quanto già emerso dagli esempi 3.3.1 e successivo. Le matrici dei coefficienti si dividono in coppie in relazione di alternanza. I vettori costituenti la prima colonna di ciascuna matrice sono nella stessa relazione

3.5.1 Teorema *JAJ=AT*

La coppia di matrici A^{-1} matrici TA^{-1}

Confrontando il teorema 3.2 con il 3.3 nel caso particolare h=1 si trova che

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{V}(k) = \overline{A}^{-1} \vec{v}(n) = TA^{-1}\vec{v}(n)$$

da cui si ricava

$$\overline{A}^{-1} = TA^{-1}$$

e anche

$$AT = JAJ = \overline{A}$$

3.5.2 Relazione di alternanza tra le matrici A^{-1} e TA^{-1}

Essendo, per quanto visto in 3.5.1. A^{-1} e TA^{-1} rispettivamente inverse della matrice A e della sua alternata, sono anche loro in relazione di alternanza (vedi 2.6.3).

3.5.3 Relazione di alternanza tra le matrici $T^{-h}A^{-1}$ e $T^{h+1}A^{-1}$

Infatti essendo sia, T^{-h} e T^{h} che A^{-1} e TA^{-1} in relazione di alternanza lo è anche il loro prodotto (vedi 2.6.5)

3.6 Teorema dei tre polinomi

Per la determinazione di tre polinomi, di cui due di primo grado, il cui prodotto calcola somme di potenze di *n+t* interi successivi a partire da 0

Per n intero positivo e t intero non negativo dimostreremo che:

$${}^{t}\vec{S}^{*}_{m}(n) = (n+t)(n+t-1)(A_m + I_m)^{-1} T^{t}_{m} \vec{V}_{m}(n)$$

dove

$$ {}^{t}\vec{S}^{*}_{m}(n) = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{t+n-1} k \\ \sum_{k=0}^{t+n-1} k^2 \\ \dots \\ \sum_{k=0}^{t+n-1} k^m \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{t+n-1} \vec{v}_m(k) = \sum_{k=0}^{t+n-1} k\vec{V}_m(k) $$

la stessa equazione può essere espressa sottintendendo, quando non necessario, l'indice comune scrivendo più semplicemente:

$$ {}^{t}\vec{S}^{*}(n) = (n+t)(n+t-1)(A+I)^{-1}T^{t}\vec{V}(n) $$

per i simboli adottati si rimanda alla legenda (2.2)
Nel caso l'indice t sia zero si può omettere.

Fase prima

Dimostriamo ora che l'equazione risulta vera nel caso nel caso t=0:

$$ \vec{S}^{*}(n) = n(n-1)(A+I)^{-1}\vec{V}(n) $$

Spostando il fattore *n(n-1)* a destra della matrice, per le proprietà delle matrici moltiplicanti scalari, e esplicitando i vettori di Vandermonde si ha l'equivalente:

$$ \sum_{k=0}^{n-1} k\vec{V}_m(k) = (A+I)^{-1} n(n-1)\vec{V}(n) $$

moltiplicando i due membri per *A+I*

$$ (A+I)\sum_{k=0}^{n-1} k\vec{V}_m(k) = n(n-1)\vec{V}(n) $$

distribuendo il fattore alle due matrici:

$$ A\sum_{k=0}^{n-1} k\vec{V}(k) + U\sum_{k=0}^{n-1} k\vec{V}(k) = n(n-1)\vec{V}(n) $$

distribuendo agli addendi delle sommatorie:

$$\sum_{k=0}^{n-1} kA\vec{V}_m(k) + \sum_{k=0}^{n-1} kI\vec{V}_m(k) = n(n-1)\vec{V}(n)$$

Per quanto visto in ? :

$$\sum_{k=0}^{n-1} k((k+1)\vec{V}(k+1) - k\vec{V}(k)) + \sum_{k=0}^{n-1} k\vec{V}(k) = n(n-1)\vec{V}(n)$$

distribuendo e scindendo gli addendi ottenuti in tre sommatorie:

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^2\vec{V}(k+1) + \sum_{k=0}^{n-1} k\vec{V}(k+1) - \sum_{k=0}^{n-1} k^2\vec{V}(k) + \sum_{k=0}^{n-1} k\vec{V}(k) = n(n-1)\vec{V}(n)$$

portando fuori sommatoria l'ultimo addendo nelle prime due sommatorie e tenendo conto che il primo addendo della terza è nullo si ha:

$$\sum_{k=0}^{n-2} k^2\vec{V}(k+1) + (n-1)^2\vec{V}(n) + \sum_{k=0}^{n-2} k\vec{V}(k+1) + (n-1)\vec{V}(n) +$$
$$-\sum_{k=0}^{n-2}(k+1)^2\vec{V}(k+1) + \sum_{k=0}^{n-1} k\vec{V}(k) = n(n-1)\vec{V}(n)$$

accorpando le prime tre sommatorie:

$$(n-1)^2\vec{V}(n) + (n-1)\vec{V}(n) + \sum_{k=0}^{n-2}(k^2 + k - (k+1)^2)\vec{V}(k+1) +$$
$$+\sum_{k=0}^{n-1} k\vec{V}(k) = n(n-1)\vec{V}(n)$$

semplificando:

$$n(n-1)\vec{V}(n) - \sum_{k=0}^{n-2}(k+1)\vec{V}(k+1) + \sum_{k=0}^{n-1} k\vec{V}(k) = n(n-1)\vec{V}(n)$$

esprimendo equivalentemente la prima sommatoria:

$$n(n-1)\vec{V}(n) - \sum_{k=1}^{n-1} k\vec{V}(k) + \sum_{k=0}^{n-1} k\vec{V}(k) = n(n-1)\vec{V}(n)$$

essendo 0 l'addendo con *k=0* finalmente:

$$n(n-1)\vec{V}(n) = n(n-1)\vec{V}(n)$$

quindi per l'equivalenza delle equazioni precedenti anche la prima viene dimostrata.

<u>*Secondo e ultima fase*</u>

Per estendere ulteriormente la nostra equazione basta sostituire *n* con *n+t* nella precedente equazione:

$$\vec{S}^*(n+t) = n(n-1)(A+I)^{-1}\vec{V}(n+t)$$

quindi tenendo conto che

$$\vec{V}(n+t) = T^t\vec{V}(n)$$

otteniamo

$${}^t\vec{S}^*(n) = (n+t)(n+t-1)(A+I)^{-1}T^t\vec{V}(n)$$

cioè il teorema che si voleva dimostrare

3.6.1 Esempio t=1 m=7

Calcolando $(A+I)^{-1}T = (T^{-1}(A+I))^{-1}$ (indici sottintesi) si ha:

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} k^1 \\ \sum_{k=1}^{n} k^2 \\ \sum_{k=1}^{n} k^3 \\ \sum_{k=1}^{n} k^4 \\ \sum_{k=1}^{n} k^5 \\ \sum_{k=1}^{n} k^6 \\ \sum_{k=1}^{n} k^7 \end{pmatrix} = n(n+1) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -6 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 10 & -10 & 6 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & -15 & 20 & -15 & 7 & 0 \\ 1 & -7 & 21 & -35 & 35 & -21 & 8 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \\ n^5 \\ n^6 \end{pmatrix}$$

e calcolando l'inversa:

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} k^1 \\ \sum_{k=1}^{n} k^2 \\ \sum_{k=1}^{n} k^3 \\ \sum_{k=1}^{n} k^4 \\ \sum_{k=1}^{n} k^5 \\ \sum_{k=1}^{n} k^6 \\ \sum_{k=1}^{n} k^7 \end{pmatrix} = n(n+1) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{30} & \frac{1}{30} & \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ \frac{1}{42} & -\frac{1}{42} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{5}{14} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & -\frac{5}{24} & \frac{5}{24} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \\ n^5 \\ n^6 \end{pmatrix}$$

o equivalentemente:

$$\sum_{k=1}^{n} k^1 = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(1+2n)}{6}$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n(n+1)(+n+n^2)}{4}$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(-1+n+9n^2+6n^3)}{30}$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^5 = \frac{n(n+1)(-n+n^2+4n^3+2n^4)}{12}$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^6 = \frac{n(n+1)(-1-n-6n^2+6n^3+15n^4+6n^5)}{42}$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^7 = \frac{n(n+1)(2n-2n^2-5n^3+5n^4+9n^5+3n^6)}{24}$$

Le matrici dei coefficienti di questo caso e del precedente in cui t=0 m=7, sono a segni alternati come le loro inverse.

4.0 Sequenze bernoulliane

Qui verranno definiti e generalizzati i numeri e i polinomi di Bernoulli. Verrà dimostrata e generalizzata la formula detta di Faulhaber.

4.1 Analisi della matrice A^{-1}

Indicheremo con $[A^{-1}]_{i,j}$ il generico elemento di questa matrice inversa di A. Indicheremo con $A_{i,j}$ il minore di ordine m-1 ottenuto dalla matrice A eliminando riga i e colonna j.

4.1.1 I coefficienti di grado massimo della diagonale principale.

Tenendo presente i complementi algebrici si ha

$$[A_m^{-1}]_{m,m} = (-1)^{m+m} \frac{|A_{m,m}|}{|A_m|}$$

I determinanti delle matrici triangolari si calcolano facilmente moltiplicando gli elementi della diagonale principale per cui:

$$[A_m^{-1}]_{m,m} = \frac{(m-1)!}{m!} = \frac{1}{m}$$

Ciò conferma quanto osservabile negli esempi: Il coefficiente del monomio di grado massimo è il reciproco del grado del polinomio.

4.1.2 I coefficienti dei monomi secondi per grado

Tenendo presente i complementi algebrici si ha

$$[A_m^{-1}]_{m,m-1} = (-1)^{2m-1} \frac{|A_{m-1,m}|}{|A_m|}$$

Anche questa volta le matrici di cui si deve calcolare il determinante sono triangolari per cui il calcolo risulta piuttosto semplice. Non sarà così negli altri casi.

$$[A_m^{-1}]_{m,m-1} = -\frac{-\binom{m}{2}(m-2)!}{m!} = -\frac{1}{2}$$

4.1.3 Differenza tra i coefficienti di *A*$^{-1}$ e *TA*$^{-1}$

Abbiamo dimostrato che per m>1 il polinomio, per quanto riguarda i monomi di grado più elevato, è:

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^{m-1} = \frac{1}{m}n^m - \frac{1}{2}n^{m-1} + \dots$$

se ora sommiamo ai due membri n^{m-1} otteniamo:

$$n^{m-1} + \sum_{k=0}^{n-1} k^{m-1} = n^{m-1} + \frac{1}{m}n^m - \frac{1}{2}n^{m-1} + \dots$$

e quindi :

$$\sum_{k=1}^{n} k^{m-1} = \frac{1}{m}n^m + \frac{1}{2}n^{m-1} + \dots$$

Ciò dimostra che le matrici dei coefficienti polinomiali, nei due casi, differiscono soltanto per il segno del monomio secondo in grado. Gli altri coefficienti sono identici. Poiché però le due matrici dei coefficienti sono anche in relazione di alternanza, tutti gli altri elementi che dovrebbero cambiare segno devono essere zero, dato che questo è l'unico numero che non cambia se moltiplicato per -1. Dunque, tranne quando

$$[A_m^{-1}]_{i,i-1} = -\frac{1}{2} \qquad [JA_m^{-1}J]_{i,i-1} = [TA_m^{-1}]_{i,i-1} = \frac{1}{2}$$

se *i+j* è un dispari risulta sempre:

$$[A_m^{-1}]_{i,j} = 0 \qquad [JA_m^{-1}J]_{i,j} = [TA_m^{-1}]_{i,j} = 0$$

vedi anche esempi 3.1.1 e 3.2.1

4.2 Numeri di Bernoulli

Per quanto visto precedentemente, le prime colonne delle due matrici di coefficienti differiscono tra loro solo per il segno dell'elemento della seconda riga -½ nella prima ½ nella seconda. Queste due colonne danno luogo a due sequenze di numeri quasi identiche chiamate numeri di Bernoulli. Il nome fu assegnato nel 1721, poco dopo la pubblicazione di "Ars Conjectandi", da Abraham de Moivre (1667-1754) anche se all'epoca, come Bernoulli stesso avevo indicato, si considerava la sequenza dal terzo elemento in poi. Oggi molti autori preferiscono dare due definizioni distinte. Una variante, più diffusa con secondo elemento -½ e un'altra con +½ che, in certe situazioni, risulta più comoda. La prima variante è spesso indicata con B^- la seconda B^+ in entrambi i casi gli indici delle sequenze infinite si fanno iniziare da zero.

4.2.1 I coefficienti dei monomi di primo grado

Calcolando come per gli altri coefficienti tenendo conto dei complementi algebrici:

$$[A_m^{-1}]_{m,1} = (-1)^{m+1}\frac{|A_{1,m}|}{|A_m|} = (-1)^{m+1}\frac{|A_{1,m}|}{m!}$$

analogamente si può fare lo stesso per l'altra matrice molto simile alla precedente:

$$[TA_m^{-1}]_{m,1} = [\overline{A_m}^{-1}]_{m,1} = (-1)^{m+1}\frac{|\overline{A}_{1,m}|}{|\overline{A}_m|} = (-1)^{m+1}\frac{|\overline{A}_{1,m}|}{m!}$$

I complementi algebrici ritagliano le matrici eliminando prima riga e ultima colonna. Nel primo caso si ottiene una matrice i cui elementi sono:

$$[A_{1,m}]_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{se } j > 1 + i \\ \binom{i+1}{j-1} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Nel secondo caso invece compare una matrice simile a segni alterni . Siccome di questa matrice interessa solo il determinante conviene considerare la sua alternata che non lo muta. La nuova matrice è a segni tutti negativi.

Moltiplicando tutti gli elementi delle righe per -1 si ottiene la matrice $A_{1,m}$ ma il determinante risulta così moltiplicato per -1 *m*-1 volte. Dunque cambia segno quando m-1 è dispari.

$$[\overline{A}_m^{-1}]_{m,1} = (-1)^{m+1}\frac{|\overline{A}_{1,m}|}{m!} = (-1)^{m+1}\frac{|A_{1,m}|(-1)^{m+1}}{m!} = \frac{|A_{1,m}|}{m!}$$

dunque possiamo esprimere le due più diffuse sequenze bernoulliane così:

$$B_n^+ = \frac{|A_{1,m}|}{(n+1)!} \qquad B_n^- = (-1)^n\frac{|A_{1,m}|}{(n+1)!}$$

4.2.1.1 Esempio del calcolo di B_6

Abbiamo dunque ricavato la seguente formula

$$B_n^+ = \frac{|A_{1,m}|}{(n+1)!}$$

Ecco un esempio con n=6:

$$B_6^+ = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 0 \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 \\ 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 \end{vmatrix}}{7!} = \frac{120}{5040} = \frac{1}{42}$$

4.2.2 Prima alternativa

Alternativa con risultato solo da una matrice

Per le proprietà dei determinanti, dividendo ogni riga della precedente matrice per un fattore del fattoriale, indicato dalla seconda colonna , la formula precedente può essere modificata in modo che la matrice fornisca direttamente il risultato. Si ottiene in questo modo una matrice C_n di n righe e n colonne i cui elementi sono:

$$[C_n]_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{se } j > 1+i \\ \binom{i+1}{j-1}\frac{1}{i+1} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

4.2.2.1 Esempio n=6

$$B_6^+ = |C_6| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & 1 & \frac{5}{2} & \frac{10}{3} & \frac{5}{2} & 1 \\ \frac{1}{7} & 1 & 3 & 5 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 0,02380952381...(= \frac{1}{42})$$

4.2.3 Abinamentocon il teorema di Clausen-Von Staudt

Un ulteriore adattamento della formula trovata , per *n>0* pari, si ottiene, tenendo conto del noto teorema di Clausen-Von Staudt. Questo permette di calcolare facilmente il denominatore selezionando solo alcuni fattori del fattoriale a denominatore della formula in 4.2.1. Ecco come:

$$den(B_n) = \prod_{i=1}^{n+1} f(n,i)$$

$$f(n,k) = \begin{cases} k & \text{se } k \; primo \wedge (k-1)|n \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In base a quanto visto sulla formula dimostrata in 4.2.1 il numeratore può essere calcolato direttamente da:

$$num(B_n^+) = |K_n|$$

dove gli elementi della matrice sono:

$$[K_n]_{i,k} = \begin{cases} 0 & \text{se } k > 1 + i \\ \binom{i+1}{k-1} & \text{se } i + 1 \; primo \wedge i|n \\ \binom{i+1}{k-1}\frac{1}{i+1} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dato che nella seconda colonna oltre agli 1 restano soltanto i numeri soddisfacenti la condizione del teorema di Clausen.Von Staudt, il denominatore si può ottenere come:

$$den(B_n^+) = \prod_{i=1}^{n} [K_n]_{i,2}$$

4.2.3.1 Esempio n=12

con il determinante di K_{12} si ottiene il numeratore del corrispondente numero di Bernoulli.

$$num(B_{12}^+) = |K_{12}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & 1 & \frac{5}{2} & \frac{10}{3} & \frac{5}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & 1 & \frac{7}{2} & 7 & \frac{35}{4} & 7 & \frac{7}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & 1 & 4 & \frac{28}{3} & 14 & 14 & \frac{28}{3} & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{10} & 1 & \frac{9}{2} & 12 & 21 & \frac{126}{5} & 21 & 12 & \frac{9}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{11} & 1 & 5 & 15 & 30 & 42 & 42 & 30 & 15 & 5 & 1 & 0 \\ \frac{1}{12} & 1 & \frac{11}{2} & \frac{55}{3} & \frac{165}{4} & 66 & 77 & 66 & \frac{165}{4} & \frac{55}{3} & \frac{11}{2} & 1 \\ 1 & 13 & 78 & 286 & 715 & 1287 & 1716 & 1716 & 1287 & 715 & 286 & 78 \end{vmatrix} = -691$$

Il numeratore si potrà leggere moltiplicando gli elementi della seconda colonna dato che i diversi da 1 sono proprio quei numeri che soddisfano alla condizione del teorema di Clausen-Von Staudt

$$den(B_{12}^{+}) = \prod_{i=1}^{12} [K_{12}]_{i,2} = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 = 2730$$

4.2.4 Numeri di Bernoulli uguali a zero

Per quanto visto in 4.1.3 le due matrici le cui prime colonne sono servite per definire le due sequenze bernoulliane hanno poco meno della metà degli elementi uguali a zero. Per questo dato che le sequenze partono da indice 0, l'indice n corrisponde alla colonna 1 e riga n+1 della matrice corrispondente. La somma dei due indici é n+2 quindi quando n è dispari, dopo il primo caso eccezionale in cui valgono +½ o -½ , tutti i numeri di Bernoulli valgono zero.

4.2.5 Relazione tra numeri di Bernoulli e coefficienti binomiali

(applicato in 4.3.2 e dedotta)
moltiplicando la riga m-esima della matrice A con la prima colonna della sua inversa abbiamo:

$$\sum_{k=1}^{m} [A_m]_{m,k} [A_m^{-1}]_{k,1} = \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k-1} B_{k-1}^{-} = \begin{cases} 0 & \text{se } k > 1 \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

facendo la stessa con la sua analoga a segni alternati:

$$\sum_{k=1}^{m} [\overline{A}_m]_{m,k} [\overline{A}_m^{-1}]_{k,1} = \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k-1} (-1)^{k-1} B_{k-1}^{+} = \begin{cases} 0 & \text{se } k > 1 \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Queste formule per m=1 danno il valore di B_0=1 per m>1 portano ad una formula che fornisce ricorsivamente B_n in funzione dei precedenti valori. Per esempio:

$$\sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k-1} B_{k-1}^{-} = \binom{m}{m-1} B_{m-1}^{-} + \sum_{k=1}^{m-1} \binom{m}{k-1} B_{k-1}^{-} = 0$$

da cui si ricava:

$$B^-_{m-1} = -\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m-1}\binom{m}{k-1}B^-_{k-1}$$

o equivalentemente:

$$B^-_n = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}B^-_k$$

formula ricorsiva dedotta come caso particolare in 4.3.3 e, generalizzata in 4.5.1

4.3. La formula rivelata in "ars conjectandi"

Nella pagina del libro di Jacob Bernoulli che abbiamo mostrato è data la seguente formula che qui esprimiamo in simboli attuali:

$$\sum_{k=1}^{n} k^c = \frac{n^{c+1}}{c+1} + \frac{1}{2}n^c + \sum_{k=2}^{c}\frac{B_k}{k!}c^{\underline{k-1}}n^{c-k+1}$$

da cui si deduce facilmente anche

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^c = \frac{n^{c+1}}{c+1} - \frac{1}{2}n^c + \sum_{k=2}^{c}\frac{B_k}{k!}c^{\underline{k-1}}n^{c-k+1}$$

Notare che l'indice dei numeri di Bernoulli parte da due per cui è irrilevante specificare con il segno in apice a quale variante ci si riferisca.
Queste formule possono essere espresse anche in forma più compatta:

$$\sum_{k=1}^{n} k^c = \frac{1}{c+1}\sum_{k=0}^{c}\binom{c+1}{k}B_k^+ n^{c+1-k},$$
$$\sum_{k=1}^{n-1} k^c = \frac{1}{c+1}\sum_{k=0}^{c}\binom{c+1}{k}B_k^- n^{c+1-k},$$

chi invece si ostina a voler privilegiare una delle due varianti dei numeri di Bernoulli dovrà complicare le cose usando una di queste:

$$\sum_{k=1}^{n} k^c = \frac{1}{c+1}\sum_{k=0}^{c}(-1)^k\binom{c+1}{k}B_k^- n^{c+1-k}$$
$$\sum_{k=1}^{n-1} k^c = \frac{1}{c+1}\sum_{k=0}^{c}(-1)^k\binom{c+1}{k}B_k^+ n^{c+1-k}$$

Naturalmente dato l'annullarsi dei numeri con indice dispari maggiori di 1 il fattore aggiunto serve solo a correggere il segno di ½.
Possiamo riassumere in forma didattica, come esempio relativo ai primi casi, quanto evidenziato dal libro di Bernoulli come segue:

$$1^0 + 2^0 + \cdots + n^0 = \frac{1}{1}\left(1B_0 n\right)$$
$$1^1 + 2^1 + \cdots + n^1 = \frac{1}{2}\left(2B_1^+ n^1 + 1B_0 n^2\right)$$
$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{3}\left(3B_2 n + 3B_1^+ n^2 + 1B_0 n^3\right)$$
$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}\left(4B_3 n + 6B_2 n^2 + 4B_1^+ n^3 + 1B_0 n^4\right)$$
$$1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 = \frac{1}{5}\left(5B_4 n + 10B_3 n^2 + 10B_2 n^3 + 5B_1^+ n^4 + 1B_0 n^5\right)$$
$$1^5 + 2^5 + \cdots + n^5 = \frac{1}{6}\left(6B_5 n + 15B_4 n^2 + 20B_3 n^3 + 15B_2 n^4 + 6B_1^+ n^5 + 1B_0 n^6\right)$$

Questo esempio fa intravedere la matrice Z_6 caso particolare della matrice di Z definita in 2.2 Quindi, tenendo conto di 2.2.3, dobbiamo dimostrare che:

$$A_n^{-1} = \tau(N_n^{-1} Z_n, \vec{B}_n^{-})$$
$$TA_n^{-1} = \tau(N_n^{-1} Z_n, \vec{B}_n^{+})$$

dove i vettori indicano le due sequenze bernoulliane in relazione di alternanza
Jakob Bernoulli non poté dimostrare il suo risultato. Noi invece, data l'unicità della matrice inversa, potremo farlo dimostrando che con le nuove definizioni risultano ancora matrici inverse rispettivamente di *A* e della sua simile a segni alternati.
E' facile dimostrare che le due matrici così definite sono in relazione di alternanza.
Per questo sarà sufficiente dimostrare solo uno dei due teoremi prospettati.
L'altro sarà un'immediata conseguenza per quanto visto in 2.6.3 e in 2.7.6

4.3.1 Prime osservazioni sulla formula da dimostrare

Espresso in modo equivalente dobbiamo dimostrare che

$$[A_n^{-1}]_{i,j} = \frac{1}{i}[Z_n]_{i,j} B_{i-j}^{-}$$

e anche

$$[TA_n^{-1}]_{i,j} = \frac{1}{i}[Z_n]_{i,j} B_{i-j}^{+}$$

E' immediato che nel caso particolare delle prime colonne risulta:

$$[A_n^{-1}]_{i,1} = \frac{1}{i}[Z_n]_{i,1} B_{i-1}^{-} = B_{i-1}^{-}$$
$$[TA_n^{-1}]_{i,1} = \frac{1}{i}[Z_n]_{i,1} B_{i-1}^{+} = B_{i-1}^{+}$$

4.3.2 Dimostrazione della formula detta di Faulhaber

Indichiamo con G_m la matrice così definita:

$$[G_m]_{i,j} = \frac{1}{i}[Z_m]_{i,j}B^{-}_{i-j}$$

dobbiamo dimostrare che

$$G_m = A_m^{-1}$$

Procedendo per induzione si verifica facilmente il caso iniziale in cui m=1:

$$G_1 * A_1 = I_1$$

Si suppone poi la relazione vera per indice m-1:

$$G_{m-1} * A_{m-1} = I_{m-1}$$

Dobbiamo quindi dimostrare che:

$$G_m * A_m = I_m$$

Rispetto al caso precedente supposto vero, le nuove matrici da moltiplicare per ottenere la matrice unitaria, differiscono solo per l'ultima riga costituita da elementi diversi da zero e per l'ultima colonna composta di tutti zero salvo l'ultimo elemento. Dato che le m-1 righe della prima matrice acquistano uno 0 finale il prodotto con le varie colonne darà, con le prime m-1 colonne, i risultati precedenti cioè gli zeri e gli uno della matrice unitaria di ordine m-1.Quando le prime m-1 righe si moltiplicano per l'ultima colonna, essendoci uno zero per ogni addendo il risultato si annulla. Dunque nelle prime m-1 righe i valori trovati sono compatibili con l'elemento neutro del prodotto tra matrici. Rimane da mostrare che anche i valori dell'ultima riga sono zero salvo l'ultimo che è uno.

$$\sum_{k=1}^{m}[G_m]_{m,k}[A_m]_{k,j} = \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{m}[Z_m]_{m,k}B^{-}_{m-k}[A_m]_{k,j} =$$

tenendo conto degli zeri della colonna j e sostituendo secondo le definizioni delle matrici A e Z (vedi 2.2)

$$= \frac{1}{m}\sum_{k=j}^{m}\binom{m}{k}B^{-}_{m-k}\binom{k}{j-1} =$$

esprimendo i coefficienti binomiali mediante fattoriali e cambiando l'ordine dei fattori:

$$= \frac{1}{m}\sum_{k=j}^{m}\frac{m!}{k!(m-k)!}\,\frac{k!}{(j-1)!(k-j+1)!}B^{-}_{m-k} =$$

semplificando e spostando fattori

$$= \frac{1}{m}\sum_{k=j}^{m}\frac{m!}{(j-1)!}\,\frac{1}{(m-k)!(k-j+1)!}B^{-}_{m-k} =$$

sfruttando opportunamente la proprietà invariantiva

$$= \frac{1}{m}\sum_{k=j}^{m}\frac{m!}{(j-1)!(m-j+1)!}\,\frac{(m-j+1)!}{(m-k)!(k-j+1)!}B^{-}_{m-k} =$$

esprimendo di nuovo senza fattoriali e mettendo in evidenza ciò che non dipende da k

$$= \frac{1}{m}\sum_{k=j}^{m}\binom{m}{j-1}\binom{m-j+1}{m-k}B^{-}_{m-k} = \frac{1}{m}\binom{m}{j-1}\sum_{k=j}^{m}\binom{m-j+1}{m-k}B^{-}_{m-k}$$

Per la transitività dell'uguaglianza abbiamo dunque dimostrato che:

$$\sum_{k=1}^{m}[G_m]_{m,k}[A_m]_{k,j} = \frac{1}{m}\binom{m}{j-1}\sum_{k=j}^{m}\binom{m-j+1}{m-k}B^{-}_{m-k}$$

Nel caso particolare in cui *j=m* quando cioè si moltiplica la riga *m*-esima per la colonna *m*-esima abbiamo:

$$\sum_{k=1}^{m}[G_m]_{m,k}[A_m]_{k,m} = \frac{1}{m}\binom{m}{m-1}\binom{1}{0}B_0^- = B_0^- = 1$$

Risultato compatibile con la tesi che le due matrici siano inverse.
Rimane ora da dimostrare che nei rimanenti casi cioè per l'indice *j*<*m* il prodotto righe per colonne è sempre 0. Per questo mostreremo che, nei rimanenti casi, si ha:

$$\sum_{k=j}^{m}\binom{m-j+1}{m-k}B_{m-k} = 0$$

Infatti ponendo c=m-j+1 e d=m-k+1 questa diventa

$$\sum_{d=1}^{c}[A_c]_{c,d}[A_c^{-1}]_{d,1} = \sum_{d=1}^{c}\binom{c}{d-1}B_{d-1} = 0$$

cioè quanto già dimostrato in 4.2.5

Essendo dunque la matrice prodotto uguale all'elemento neutro abbiamo dimostrato che i coefficienti per la somma delle potenze di interi successivi possono essere espressi in funzione dei numeri di Bernoulli come indicato in "Ars conjectandi".

4.3.3 Due casi particolari della formula di Faulhaber

Date le due versioni più comuni della formula di Faulhaber

$$\sum_{k=1}^{n}k^c = \frac{1}{c+1}\sum_{k=0}^{c}\binom{c+1}{k}B_k^+ n^{c+1-k},$$
$$\sum_{k=1}^{n-1}k^c = \frac{1}{c+1}\sum_{k=0}^{c}\binom{c+1}{k}B_k^- n^{c+1-k},$$

(Si ricorda che il + e il - all'apice di B indicano rispettivamente la variante B_1=½ e quella B_1=-½ dei numeri di Bernoulli)

Ponendo *n*=1 e nella prima equazione e *n*=2 nella seconda otteniamo le seguenti equazioni:

$$1 = \frac{1}{c+1}\sum_{k=0}^{c}\binom{c+1}{k}B_k^+$$
$$1 = \frac{1}{c+1}\sum_{k=0}^{c}\binom{c+1}{k}B_k^- 2^{c+1-k}$$

Da cui esplicitando si ottengono rispettivamente:

$$B_c = 1 - \frac{1}{c+1}\sum_{k=0}^{c-1}\binom{c+1}{k}B_k^+$$
$$B_c = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{c+1}\sum_{k=0}^{c-1}\binom{c+1}{k}B_k^- 2^{c+1-k}$$

Se nella prima equazione effettuiamo la sostituzione

$$B_1{}^+ = 1 + B_1{}^-$$

ritroviamo la formula ricorsiva più comune già trovata alla fine di 4.2.5 mentre la seconda equazione, formula ricorsiva alternativa, si può semplificare in

$$B_c = \frac{1}{2} - \frac{1}{c+1}\sum_{k=0}^{c-1}\binom{c+1}{k}B_k 2^{c-k}$$

4.4 Le infinite sequenze bernoulliane

Abbiamo dimostrato che per ogni numero relativo h e per ogni m intero positivo scelto per le dimensioni, esiste una matrice quadrata $T^h A^{-1}$ che fornisce i coefficienti dei polinomi per le somme di potenze di interi successivi:

$$\sum_{k=h}^{h+n-1}\vec{V}(k) = T^h A^{-1} n\vec{V}(n)$$

Definiamo la prima colonna di detta matrice come il vettore **B**(h) di m componenti.
Si vede subito che **B(0)** corrisponde ai primi m numeri di Bernoulli nella variante con $B_1=-½$ mentre il vettore **B(1)** corrisponde ai numeri di Bernoulli nella variante $B_1=½$.

Essendo il vettore **B(0)** la prima colonna della matrice A^{-1} si deduce facilmente, per il meccanismo del prodotto righe per colonne, che il vettore **B(h)** è la prima colonna della matrice T^hA^{-1} quindi che risulta:

$$\overrightarrow{B(h)} = T^h \overrightarrow{B(0)}$$

e in particolare, specificando le dimensioni,

$$\overrightarrow{B_m}(1) = T_m \overrightarrow{B_m}(0) \qquad \overrightarrow{B_m}(2) = T_m \overrightarrow{B_m}(1) \qquad \overrightarrow{B_m}(3) = T_m \overrightarrow{B_m}(2) \qquad \overrightarrow{B_m}(h) = T_m \overrightarrow{B_m}(h-1)$$

e quindi anche:

$$_1B_m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} {_0B_k} \qquad _2B_m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} {_1B_k} \qquad _hB_m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} {_{h-1}B_k}$$

da cui, non specificando le dimensioni vettoriali, ecco alcune sequenze bernoulliane:

$$\overrightarrow{B}(-1) = (1, -\frac{3}{2}, \frac{13}{6}, -3, \frac{119}{30}, -5, \frac{253}{42}, -7, \frac{239}{30}, -9, \frac{665}{66}, -11, \frac{32069}{2730}, \dots)$$
$$\overrightarrow{B}(0) = (1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{30}, 0, \frac{1}{42}, 0, \frac{1}{30}, 0, \frac{5}{66}, 0, -\frac{691}{2730}, 0, \frac{7}{6}, 0, -\frac{3617}{510}, 0, \dots)$$
$$\overrightarrow{B}(1) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{30}, 0, \frac{1}{42}, 0, \frac{1}{30}, 0, \frac{5}{66}, 0, -\frac{691}{2730}, 0, \frac{7}{6}, 0, -\frac{3617}{510}, 0, \dots)$$
$$\overrightarrow{B}(2) = (1, \frac{3}{2}, \frac{13}{6}, 3, \frac{119}{30}, 5, \frac{253}{42}, 7, \frac{239}{30}, 9, \frac{665}{66}, 11, \frac{32069}{2730}, 13, \frac{91}{6}, 15, \dots)$$
$$\overrightarrow{B}(3) = (1, \frac{5}{2}, \frac{37}{6}, 15, \frac{1079}{30}, 85, \frac{8317}{42}, 455, \frac{30959}{30}, 2313, \frac{338585}{66}, 11275, \dots)$$

Specificando le dimensioni abbiamo indicato i vettori con **$B_m(h)$** e le *m* componenti con $_hB_0$, $_hB_1$, $_hB_2$,...,$_hB_{m-1}$. Nel caso h=0 il relativo indice potrà essere omesso per indicare semplicemente i numeri di Bernoulli nella forma più diffusa.

4.5 La formula di Faulhaber generalizzata e dimostrata

In 4.3.2 abbiamo dimostrato che

$$A^{-1} = \tau(N^{-1}Z, \vec{B}(0))$$

e dunque per il teorema 3.1 che:

$$\vec{S}(n) = \tau(N^{-1}Z, \vec{B}(0))\vec{v}(n)$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^m = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k}{}_0B_k n^{m+1-k}$$

Moltiplicando a sinistra le due matrici della prima equazione per T^h per quanto dimostrato in 2.7.5.2 si ottiene:

$$T^h A^{-1} = \tau(N^{-1}Z, \vec{B}(h))$$

e dunque per il teorema 3.3 risulta:

$$_h\vec{S}(n) = \tau(N^{-1}Z, \vec{B}(h))\vec{v}(n)$$

che può anche esprimersi, senza usare le matrici, come

$$\sum_{k=h}^{h+n-1} k^m = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k}{}_hB_k n^{m+1-k}$$

Che è la generalizzazione della formula di Faulhaber.

Si ricorda che la sequenza ${}_0B_k$ corrisponde ai numeri di Bernoulli nella variante B_1=-½ da che la ${}_hB_k$ è la h-esima sequenza bernoulliana.

4.5.1 Prima conseguenza notevole

[Utilizzata in 5.1]
Dalla precedente formula i Faulhaber generalizzata ponendo *n=1*

otteniamo:

$$h^m = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} {}_hB_k$$

questa per valori di m crescenti dà luogo a

$$\begin{aligned} 1 &= 1{}_hB_0 \\ 2h &= 1{}_hB_0 + 2{}_hB_1 \\ 3h^2 &= 1{}_hB_0 + 3{}_hB_1 + 3{}_hB_2 \\ 4h^3 &= 1{}_hB_0 + 4{}_hB_1 + 6{}_hB_2 + 4{}_hB_3 \\ \cdots &= \cdots \end{aligned}$$

che usando matrici e vettori può esprimersi come

$$\vec{v}'(h) = A\vec{B}(h)$$

che inversamente dà:

$$A^{-1}\vec{v}'(h) = \vec{B}(h)$$

4.5.2 Seconda conseguenza notevole

Sempre dal caso particolare n=1 visto precedentemente esplicitando si ottengono le definizioni ricorsive delle sequenze bernoulliane:

$$ {}_hB_0 = 1 \qquad {}_hB_m = h^m - \frac{1}{m+1}\sum_{j=0}^{m-1}\binom{m+1}{j}{}_hB_j $$

Nel caso *h=1*, la variante dei numeri di Bernoulli con $B_1=½$, si può sostituire $1-{}_1B_1$ con ${}_0B_1 = B_1$ ottenendo la relazione ricorsiva più diffusa per i numeri di Bernoulli già individuata anche in 4.2.5 :

$$ B_0 = 1 \qquad B_m = -\frac{1}{m+1}\sum_{j=0}^{m-1}\binom{m+1}{j}B_j $$

4.5.3 Riassunto ante derivazione

4.6 Polinomi di Bernoulli

Attraverso la derivazione dei polinomi per il calcolo delle somme di interi successivi si arriva ai polinomi di Bernoulli

4.6.1 Derivando la formula di Faulhaber

Abbiamo generalizzato la formula di Faulhaber dimostrando che:

$$ \sum_{k=h}^{h+n-1} k^m = {}_hS(n) = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k}{}_hB_k n^{m+1-k} $$

Derivando otteniamo:

$$ {}_hS'(n) = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k}{}_hB_k (m+1-k)n^{m-k} $$

esprimendo il coefficiente binomiale con i fattoriali:

$$ {}_hS'(n) = \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{m+1}\frac{(m+1)!}{k!(m+1-k)!}(m+1-k){}_hB_k n^{m-k} $$

semplificando:

$$ {}_hS'(n) = \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!}\, {}_hB_k n^{m-k} $$

e quindi esprimendo il risultato mediante il coefficiente binomiale:

$$ {}_hS'(n) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} {}_hB_k n^{m-k} $$

Nel caso particolare di h=0 otteniamo i noti numeri di Bernoulli:

$$ S'(n) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} B_k n^{m-k} $$

4.6.2 Derivando la funzione vettoriale a coefficiente tau

La formula di Faulhaber generalizzata corrisponde all'equazione vettoriale

$$ {}_h\vec{S}(n) = \tau(N^{-1}Z, \vec{B}(h))\vec{v}(n) $$

infatti derivando rispetto a n

$$ {}_h\vec{S}'(n) = \tau(N^{-1}Z, \vec{B}(h))\vec{v}'(n) $$

essendo tra i vettori la relazione **v'(n)**=N**V(n)** questa diventa:

$$ {}_h\vec{S}'(n) = \tau(N^{-1}Z, \vec{B}(h))N\vec{V}(n) $$

per 2.7.2 il fattore N può entrare nell'argomento della funzione tau:

$$ {}_h\vec{S}'(n) = \tau(N^{-1}ZN, \vec{B}(h))\vec{V}(n) $$

dunque per 2.4.4 si ottiene:

$$ {}_h\vec{S}'(n) = \tau(T, \vec{B}(h))\vec{V}(n) $$

Infine nel caso particolare dei polinomi di Bernoulli:

$$ \vec{S}'(n) = \tau(T, \vec{B}(0))\vec{V}(n) $$

4.6.3 Derivando la funzioni vettoriale

Derivando si ottiene

$$ {}_h\vec{S}(n) = T^h A^{-1} \vec{v}(n) $$
$$ {}_h\vec{S}'(n) = T^h A^{-1} \vec{v}'(n) $$

e in particolare per i polinomi di Bernoulli:

$$ \vec{S}'(n) = A^{-1} \vec{v}'(n) $$

4.6.4 Teorema di coincidenza con i polinomi di Bernoulli
(Utilizzato in 5.1,)

Per la precedente e per essere anche *A^{-1}**v'(n)**=**B(n)*** (vedi 4.5.1) risulta dimostrato che:

$$ \vec{S}'(n) = \vec{B}(n) $$

Passando alle componenti con indice m dei vettori quindi:

$$ S'_m(n) = {}_nB_m $$

quindi indicando con B(n) i polinomi di Bernoulli:

$$ S'_m(n) = B_m(n) = {}_nB_m $$

4.6.5 Traslazione orizzontale dei polinomi bernoulliani

Estendendo, non solo a quelli di Bernoulli (caso h=0), ma a tutti i polinomi derivati il precedente confronto abbiamo:

$$ {}_h\vec{S}'(n) = T^h A^{-1} \vec{v}'(n) = T^h \vec{B}(n) = \vec{B}(n+h) = \vec{S}'(n+h) $$

passando alle componenti m-esime:

$$ {}_hS'_m(n) = S'_m(n+h) = B_m(n+h) $$

ciò mostra che le derivate dei polinomi per la somma di n interi successivi inizianti da h sono traslazioni orizzontali, di h unità, dei polinomi di Bernoulli

4.6.6 Sottrazioni di polinomi di Bernoulli
Come visto in 3.3.3 risulta:

$$ \sum_{k=0}^{n-1} (h+k)^m = S_m(h+n) - S_m(h) $$

derivando rispetto ad h i due nembri otteniamo:

$$m\sum_{k=0}^{n-1}(h+k)^{m-1} = S'_m(n+h) - S'_m(h)$$

da cui ${}_hS_{m-1}$:

$$\sum_{k=0}^{n-1}(h+k)^{m-1} = \frac{B_m(n+h) - B_m(h)}{m}$$

e passando dalle componenti ai vettori:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\vec{V}'(h+k) = \vec{B}(n+h) - \vec{B}(h)$$

4.7 Perfezionamento della formula di Faulhaber

Avendo dimostrato in 4.6.4 che ${}_hB_k$=*B(k)* possiamo riscrivere la formula ottenuta in 4.5 facendo riferimento ai polinomi di Bernoulli nel seguente modo:

$$\sum_{k=h}^{h+n-1} k^m = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k}B_k(h)\, n^{m+1-j}$$

4.7.1 Generalizzazione per h non necessariamente intero

Per generalizzare la precedente a valori di h razionali, reali o complessi possiamo esprimere la precedente nel seguente modo equivalente nel caso di h intero relativo:

$$\sum_{k=0}^{n-1}(h+k)^m = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k}B_k(h)n^{m+1-k}$$

4.7.2 Altre forme di generalizzazione

La stessa generalizzazione, utilizzando i polinomi di Bernoulli per le componenti di **B(h)** assume questa forma:

$${}_h\vec{S}(n) = \tau(N^{-1}Z, \vec{B}(h))\vec{v}(n)$$

oppure esprimendo T^h con la funzione tau (2.3.1) si ha:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \vec{V}(h+k) = \tau(T, \vec{V}(h))A^{-1}\vec{v}(n)$$

4.7.3 Relazione tra i polinomi di Bernoulli

Derivando rispetto ad h i due membri della 4.7.1

$$m\sum_{k=0}^{n-1}(h+k)^{m-1} = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k}B'_k(h)n^{m+1-k}$$

da cui

$$\sum_{k=0}^{n-1}(h+k)^{m-1} = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!(m+1-k)!}B'_k(h)n^{m+1-k}$$

Essendo zero la derivata di *$B_0(h)$*

$$\sum_{k=0}^{n-1}(h+k)^{m-1} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{m!}{k!(m+1-k)!}B'_k(h)n^{m+1-k}$$

che equivale a

$$\sum_{k=0}^{n-1}(h+k)^{m-1} = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{m!}{(k+1)!(m-k)!}B'_{k+1}(h)n^{m-k}$$

quindi:

$$\sum_{k=0}^{n-1}(h+k)^{m-1} = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m}{k}\frac{B'_{k+1}(h)}{(k+1)}n^{m-k}$$

D'altra parte la 4.7.1 per un esponente *m-1* corrisponde a

$$\sum_{k=0}^{n-1}(h+k)^{m-1} = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m}{k}B_k(h)n^{m-k}$$

Dal confronto dei coefficienti deve quindi essere:

$$B_k(h) = \frac{B'_{k+1}(h)}{(k+1)}$$

Abbiamo quindi dimostrato un'altra nota relazione tra i polinomi bernoulliani.

5. Sequenze bernoulliane nell'analisi matematica

Qui si dimostra come le sequenze Bernoulliane definite a partire dalle matrici come fatto precedentemente compaiono anche nello sviluppo in serie di potenzei.

5.1 Teorema della funzione generatrice

Mostreremo che, al variare del parametro h, risulta:

$$\frac{xe^{hx}}{e^{x}-1}=\sum_{k=0}^{\infty}B_k(h)\frac{x^k}{k!}$$

Infatti ricordando lo sviluppo in serie delle funzioni esponenziali:

$$\boxed{\begin{aligned} e^{x} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots, \\ e^{hx} &= \sum_{k=0}^{\infty}h^k\frac{x^k}{k!}=1+hx+h^2\frac{x^2}{2!}+h^3\frac{x^3}{3!}+h^4\frac{x^4}{4!}+\cdots \end{aligned}}$$

e sostituendo abbiamo:

$$\frac{x(1+hx+h^2\frac{x^2}{2!}+h^3\frac{x^3}{3!}+h^4\frac{x^4}{4!}+\cdots)}{x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots}=\sum_{k=0}^{\infty}B_k(h)\frac{x^k}{k!}$$

raccogliendo il comune fattore:

$$\frac{x(1+hx+h^2\frac{x^2}{2!}+h^3\frac{x^3}{3!}+h^4\frac{x^4}{4!}+\cdots)}{x(1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^3}{4!}+\cdots)}=\sum_{k=0}^{\infty}B_k(h)\frac{x^k}{k!}$$

semplificando

$$\frac{1 + hx + h^2 \frac{x^2}{2!} + h^3 \frac{x^3}{3!} + h^4 \frac{x^4}{4!} + \cdots}{1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \cdots} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(h) \frac{x^k}{k!}$$

moltiplicando i due membri per il denominatore si ottiene:

$$1 + hx + h^2 \frac{x^2}{2!} + h^3 \frac{x^3}{3!} + h^4 \frac{x^4}{4!} + \cdots = (1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \cdots) \sum_{k=0}^{\infty} B_k(h) \frac{x^k}{k!}$$

Considerando solo il primo membro abbiamo il polinomio:

$$1 + hx + h^2 \frac{x^2}{2!} + h^3 \frac{x^3}{3!} + h^4 \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{h^j}{j!} x^j$$

considerando solo il secondo membro abbiamo il prodotto di due polinomi infiniti:

$$(\frac{1}{1!} + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{5!} + \cdots)(\frac{B_0(h)}{0!} + \frac{B_1(h)}{1!} x + \frac{B_2(h)}{2!} x^2 + \frac{B_3(h)}{3!} x^3 + \frac{B_4(h)}{4!} x^4 + \cdots)$$

che dà:

$$\begin{aligned}
&\frac{B_0(h)}{1!0!} + \frac{B_1(h)}{1!1!} x + \frac{B_2(h)}{1!2!} x^2 + \frac{B_3(h)}{1!3!} x^3 + \frac{B_4(h)}{1!4!} x^4 + \cdots \\
&+ \frac{B_0(h)}{2!0!} x + \frac{B_1(h)}{2!1!} x^2 + \frac{B_2(h)}{2!2!} x^3 + \frac{B_3(h)}{2!3!} x^4 + \frac{B_4(h)}{2!4!} x^5 + \cdots \\
&+ \frac{B_0(h)}{3!0!} x^2 + \frac{B_1(h)}{3!1!} x^3 + \frac{B_2(h)}{3!2!} x^4 + \frac{B_3(h)}{3!3!} x^5 + \frac{B_4(h)}{3!4!} x^6 + \cdots \\
&+ \frac{B_0(h)}{4!0!} x^3 + \frac{B_1(h)}{4!1!} x^4 + \frac{B_2(h)}{4!2!} x^5 + \frac{B_3(h)}{4!3!} x^6 + \frac{B_4(h)}{4!4!} x^7 + \cdots \\
&+ \frac{B_0(h)}{5!0!} x^4 + \frac{B_1(h)}{5!1!} x^5 + \frac{B_2(h)}{5!2!} x^6 + \frac{B_3(h)}{5!3!} x^7 + \frac{B_4(h)}{5!4!} x^8 + \cdots \\
&+ \cdots
\end{aligned}$$

Ordinando i monomi in ordine crescente seguendo le diagonali otteniamo il polinomio infinito:

$$= B_0(h) + \frac{x}{2!}\sum_{k=0}^{1}\binom{2}{k}B_k(h) + \frac{x^2}{3!}\sum_{k=0}^{2}\binom{3}{k}B_k(h) + \frac{x^3}{4!}\sum_{k=0}^{3}\binom{4}{k}B_k(h) +$$

$$+\frac{x^4}{5!}\sum_{k=0}^{4}\binom{5}{k}B_k(h) + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^j}{(j+1)!}\sum_{k=0}^{j}\binom{j+1}{k}$$

Dato che l'uguaglianza dei polinomi individuati implica la coincidenza dei corrispondenti coefficienti, abbiamo:

$$\frac{h^j}{j!} = \frac{1}{(j+1)!}\sum_{k=0}^{j}\binom{j+1}{k}B_k(h)$$

e infine moltiplicando i due membri per *j!* e semplificando:

$$h^j = \frac{1}{j+1}\sum_{k=0}^{j}\binom{j+1}{k}B_k(h)$$

Che è la relazione ricorsiva caratterizzante le sequenze bernoulliane (vedi 4.5.1). Considerando poi il teorema di coincidenza dei polinomi di Bernoulli (vedi 4.6.4), segue la tesi.

5,1.1 Nota sul precedente risultato

Notare che l'equazione ottenuta espressa con le matrici corrisponde a:

$$\vec{V}(n) = N^{-1}A\vec{B}(n)$$

moltiplicando i due membri per $A^{-1}N$ e ricordando che N**V(n)=v'(n)** si ha:

$$A^{-1}N\vec{V}(n) = \vec{B}(n)$$

$$A^{-1}\vec{v}'(n) = \vec{B}(n)$$

(confrontare anche con 4.5.1)

5.2 Dimostrazione analitica della formula di Faulhaber generalizzata.

Dimostriamo nuovamente, per altra via, quanto visto in 4.7.1
Siano n e m numeri interi positivi ed h un numero qualsiasi numero reale o anche complesso dimostreremo che

$$\sum_{k=0}^{n-1}(h+k)^m = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k}B_k(h)n^{m+1-k}$$

Sviluppando in serie di potenze e tenendo presente il teorema di Tonelli per l'inversione delle sommatorie sia ha:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} e^{(k+h)x} &= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(k+h)^p x^p}{p!} \\ &= \sum_{p=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(k+h)^p\right)\frac{x^p}{p!}\end{aligned}$$

D’altra parte considerando le progressioni geometriche, lo sviluppo in serie dimostrato in 5.1 e il prodotto di Cauchy abbiamo:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} e^{(k+h)x} &= e^{hx}\frac{1-e^{nx}}{1-e^{x}} \\ &= e^{hx}\frac{1-e^{nx}}{xe^{hx}}\frac{xe^{hx}}{1-e^{x}} = \frac{e^{nx}-1}{x}\frac{xe^{hx}}{e^{x}-1} \\ &= \sum_{p=0}^{\infty}\frac{n^{p+1}x^p}{(p+1)!}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{B_i(h)x^i}{i!} \\ &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{p}\frac{n^{p+1-i}x^{p-i}}{(p+1-i)!}\frac{B_i(h)x^i}{i!} \\ &= \sum_{p=0}^{\infty}\left(\frac{1}{p+1}\sum_{i=0}^{p}\binom{p+1}{i}B_i(h)n^{p+1-i}\right)\frac{x^p}{p!}\end{aligned}$$

Dal confronto tra questo e il precedente risultato e dall’unicità dei coefficienti dello sviluppo in serie infinita segue la tesi[4]

4 Confrontare con la tradizionale dimostrazione della formula di Faulhaber, per esempio qui: https://proofwiki.org/wiki/Faulhaber%27s_Formula

6. Bibliografia

1. Jacob Bernoulli, *"Summae potestatum" in "Artis Conjectandi*", Internet Archive (p.97),1713
2. Attilio Frajese (a cura di), Opere di Archimede, UTET, 1974.
3. Sum of power of positive integer, Mathematical association of America (MMA), in https://www.maa.org
4. Frank J. Swetz and Victor J. Katz Johann ,Mathematical treasures: Faulhaber's Accademiae Algebrae, MMA
5. Donald Knuth, Johann Faulhaber and sums of powers, Internet Archive, 1992
6. Giorgio Pietrocola, *Esplorando un antico sentiero: teoremi sulla somma di potenze di interi successivi*, Maecla 2008
7. Mcmillan Sondow, Proof of power sum and binomial coefficient congruences via Pascal's identity, Internet Archive, 2010
8. Derby Nigel (2015) A search for sums of powers, *The Mathematical Gazzette*
9. L.E.Coen, Sums of powers and bernoulli numbers, Illinois, 1995
10. Gottfried Helms , Identities involving binomial-coefficients, Bernoulli- and Stirlingnumbers ,Univ Kessel 2006

11Luigi Manabrea, con traduzione e note di Ada Lovelace, "*Sketch the analitycal engine invented by Charles Babbage*",1842,Ginevra

12. A.W.F. Edwards. Sums of powers of integers *Mathematical Gazette 66 (1982) pp 22-29*
13. A.W.F. Edwards. *A quick roote to sums of powers. American Math. Monthly (1986) pp. 451-455*
14. A.W.F Edwards Pascal's arhithmetical triangle.The story of a mathematical idea The Johns University Press Baltimore and London 1987